

## ÉQUIRÉPARTITION DE SOMMES EXPONENTIELLES

[Travaux de Katz]

par Javier FRESÁN

### 1. INTRODUCTION

Cent ans se sont écoulés depuis la parution de l'article de Weyl [30] sans que les résultats d'équirépartition en théorie des nombres cessent de faire florès, révélant des liens profonds avec la géométrie algébrique et la théorie des représentations. L'interaction de ces domaines est particulièrement riche dans les travaux de Katz dont il sera question ici. Ce sont des théorèmes, anciens et récents, d'équirépartition de sommes exponentielles sur les corps finis, le plus souvent à caractéristique fixée. Les sommes concernées s'obtiennent par transformation de Fourier, relative à un caractère, de la fonction trace d'un faisceau  $\ell$ -adique sur un groupe algébrique commutatif, et il s'agit de comprendre leur répartition lorsque le faisceau est fixe mais que l'on fait varier le caractère.

#### 1.1. L'exemple des sommes de Gauss et des sommes de Kloosterman

Soient  $p$  un nombre premier,  $q$  une puissance de  $p$  et  $\mathbf{F}_q$  un corps fini à  $q$  éléments. Étant donné un caractère additif non trivial  $\psi: \mathbf{F}_q \rightarrow \mathbf{C}^\times$  et un caractère multiplicatif  $\chi: \mathbf{F}_q^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ , on définit la *somme de Gauss*  $g(\psi, \chi)$  comme l'entier algébrique

$$g(\psi, \chi) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \psi(x)\chi(x).$$

Par exemple, si  $q = p$  et si l'on prend pour  $\psi$  le caractère « standard » et pour  $\chi$  le symbole de Legendre, il s'agit de la somme  $\sum (\frac{x}{p}) e^{\frac{2\pi i x}{p}}$  considérée par Gauss dans sa quatrième preuve de la loi de réciprocité quadratique [9].

Si  $\chi$  est trivial, la somme de Gauss vaut  $-1$  par orthogonalité des caractères ; sinon, sa valeur absolue est égale à  $\sqrt{q}$ . Choisissons, pour chaque  $p$ , un caractère non trivial  $\psi_p$  de  $\mathbf{F}_p$  et notons  $\psi_q: \mathbf{F}_q \rightarrow \mathbf{C}^\times$  le caractère  $\psi_p \circ \text{Tr}_{\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_p}$ . Gardant  $\psi_q$  fixe et faisant varier  $\chi$  parmi les caractères multiplicatifs non triviaux, on obtient  $q - 2$  « angles »

$$\theta_{q,\chi} = \frac{g(\psi_q, \chi)}{\sqrt{q}}$$

dans le cercle unité  $S^1$ . Comment ces points se répartissent-ils quand  $q$  tend vers l'infini ?

Soit  $(X, \mu)$  un espace topologique compact muni d'une mesure de probabilité  $\mu$ . Rappelons qu'une suite  $(S_N)$  de multi-ensembles finis inclus dans  $X$  est dite *équirépartie selon  $\mu$*  si la suite de mesures  $\frac{1}{|S_N|} \sum_{x \in S_N} \delta_x$  converge vaguement vers  $\mu$  lorsque  $N$  tend vers l'infini, c'est-à-dire, si pour toute fonction continue  $f: X \rightarrow \mathbf{C}$  on a l'égalité

$$\int_X f(x) \mu(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_N|} \sum_{x \in S_N} f(x).$$

Il suffit en fait de la vérifier pour une classe de fonctions test dont les combinaisons linéaires finies sont denses dans l'espace  $\mathcal{C}(X)$  des fonctions continues à valeurs complexes muni de la topologie de la convergence uniforme. De plus, si une suite est équirépartie, elle l'est alors pour une seule mesure car la limite des proportions d'éléments de  $S_N$  appartenant à une partie mesurable  $A$  détermine  $\mu(A)$ .

Dans le cas qui nous occupe, Katz remarqua dans [12, §1.3.3] que la majoration des sommes de Kloosterman obtenue par Deligne en combinant la formule des traces avec ses travaux sur la conjecture de Weil entraînait le résultat d'équirépartition suivant :

**THÉORÈME 1.1 (Deligne).** — *Lorsque  $q$  tend vers l'infini, les multi-ensembles  $\{\theta_{q,\chi}\}_{\chi \neq 1}$  s'équirépartissent selon la mesure de Haar normalisée sur le cercle unité. Autrement dit, pour toute fonction continue  $f: S^1 \rightarrow \mathbf{C}$  on a l'égalité*

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q-2} \sum_{\chi \neq 1} f(\theta_{q,\chi}).$$

Comme les polynômes de Laurent sont denses dans  $\mathcal{C}(S^1)$ , il suffit de considérer les fonctions  $f(z) = z^n$  avec  $n$  entier. Le cas  $n = 0$  est évident. Le membre gauche de (1) étant nul pour  $n \neq 0$ , il faut montrer que la suite

$$\frac{1}{q-2} \sum_{\chi \neq 1} f(\theta_{q,\chi}) = \frac{1}{q^{\frac{n}{2}}(q-2)} \sum_{\chi \neq 1} g(\psi_q, \chi)^n$$

converge vers zéro lorsque  $q$  tend vers l'infini (c'est le *critère d'équirépartition de Weyl*). Grâce à la relation  $g(\psi_q, \chi)^{-1} = g(\bar{\psi}_q, \bar{\chi})q^{-1}$ , on peut se ramener à  $n \geq 1$ , auquel cas les puissances des sommes de Gauss sont égales à

$$(2) \quad \begin{aligned} g(\psi_q, \chi)^n &= \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}_q^\times} \psi_q(x_1 + \dots + x_n) \chi(x_1 \cdots x_n) \\ &= \sum_{a \in \mathbf{F}_q^\times} \chi(a) \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}_q^\times \\ x_1 \cdots x_n = a}} \psi_q(x_1 + \dots + x_n). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\chi \mapsto g(\psi_q, \chi)^n$  est la transformée de Fourier, au sens du groupe abélien fini  $\mathbf{F}_q^\times$ , de la fonction qui à un élément  $a \in \mathbf{F}_q^\times$  associe la *somme de Kloosterman*

$$\mathrm{Kl}_n(a, q) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}_q^\times \\ x_1 \cdots x_n = a}} \psi_q(x_1 + \dots + x_n).$$

Pour  $n = 2$ , ces sommes font un caméo dans un article de Poincaré sur les formes modulaires, où il « se borne à constater » qu'elles ne sont pas nulles en général <sup>(1)</sup> [23, p.148]. Kloosterman les introduisit de manière indépendante en 1926, en raffinant la méthode du cercle pour étudier l'asymptotique du nombre de représentations d'un entier par une forme quadratique définie positive en quatre variables [18]. Un point clé de son travail est la majoration  $|\mathrm{Kl}_2(a, q)| < 2q^{3/4}$ , qu'il obtint en calculant le quatrième moment

$$\sum_{a \in \mathbf{F}_q^\times} \mathrm{Kl}_2(a, q)^4 = 2q^3 - 3q^2 - q - 1.$$

Quelques années plus tard, Salié [27] et Davenport [4] purent améliorer l'exposant de 3/4 à 2/3 en estimant le sixième moment. Puis en 1934 Hasse observa, en comparant la somme de Kloosterman au nombre de solutions de l'équation  $y^q - y = x + \frac{a}{x}$ , que la borne optimale  $2\sqrt{q}$  découlait de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis [11]; avec la preuve de Weil entre 1940 et 1948, elle fut enfin établie [29].

Trouver la majoration optimale pour les sommes de Kloosterman en plusieurs variables est une tâche significativement plus compliquée qui requiert l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau  $\ell$ -adique. En la démontrant dans l'article [6], auquel on se référera comme « Weil II » par la suite, Deligne ouvrit la voie à de nombreuses applications à l'étude des sommes exponentielles que nous sommes encore loin d'avoir épuisées. Lui-même exposa le principe de la méthode dans [5], où il montre comment en déduire l'estimée

$$|\mathrm{Kl}_n(a, q)| \leq nq^{\frac{n-1}{2}}$$

pour n'importe quels  $n \geq 2$  et  $a \in \mathbf{F}_q^\times$ . C'est ce qu'il fallait pour conclure la preuve de l'équirépartition des angles des sommes de Gauss.

FIN DE LA DÉMONSTRATION — En sommant la formule (2) sur les caractères multiplicatifs non triviaux, il vient

$$\sum_{\chi \neq 1} g(\psi_q, \chi)^n = (-1)^{n+1} + (q-1)\mathrm{Kl}_n(1, q).$$

1. Les sommes de Poincaré portent sur le groupe multiplicatif  $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times$ , par opposition à  $\mathbf{F}_q^\times$ , et peuvent être nulles. Celles que l'on considère ici ne le sont *jamais*. Par exemple, si  $q = p$ , la somme  $\mathrm{Kl}_2(a, p)$  prend des valeurs dans le sous-anneau de  $\mathbf{C}$  engendré par  $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$  et on a  $\mathrm{Kl}_2(a, p) \equiv -1$  modulo l'idéal premier  $1 - \zeta_p$ .

D'après la majoration de Deligne, nous avons donc l'inégalité

$$\left| \frac{1}{q^{\frac{n}{2}}(q-2)} \sum_{\chi \neq 1} g(\psi_q, \chi)^n \right| \leq \frac{2n+1}{\sqrt{q}},$$

et la limite du membre gauche est bien zéro lorsque  $q$  tend vers l'infini.  $\square$

*Remarque 1.2.* — Le théorème s'applique tant à la situation où  $p$  est fixe et l'on fait tendre  $q$  vers l'infini parmi les puissances de  $p$  (*égale caractéristique*) qu'à la situation où  $p$  varie aussi (*inégaie caractéristique*). Ceci est possible car la constante dans la majoration des moments, en l'occurrence  $2n+1$ , est indépendante de  $p$ .

Revenons maintenant aux sommes de Kloosterman en deux variables. Comme appliquer la conjugaison complexe revient à échanger  $x_i$  et  $-x_i$  dans l'expression de  $\text{Kl}_2(a, q)$ , ce sont des nombre réels (il en va de même pour tout  $n$  pair). Au vu de la borne de Weil, pour chaque  $a \in \mathbf{F}_q^\times$ , il existe un unique angle  $\theta_{q,a} \in [0, \pi]$  tel que

$$\text{Kl}_2(a, q) = 2\sqrt{q} \cos \theta_{q,a}.$$

Comment ces  $q-1$  angles varient-ils avec  $q$ ? En s'appuyant sur un théorème d'équirépartition de Deligne pour les traces de Frobenius d'un faisceau  $\ell$ -adique lisse, Katz démontra dans [13] que les  $\theta_{q,a}$  se répartissent comme les classes de conjugaison de matrices aléatoires dans le groupe spécial unitaire  $\text{SU}(2)$ .

Plus précisément, si l'on identifie l'intervalle  $[0, \pi]$  à l'espace de ces classes par l'application qui envoie  $\theta$  sur la classe de conjugaison de  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ , l'image directe de la mesure de Haar normalisée sur  $\text{SU}(2)$  par la projection canonique est la mesure  $(2/\pi) \sin^2 \theta d\theta$  sur  $[0, \pi]$ . Elle porte en théorie des nombres le nom de *mesure de Sato–Tate*, d'après leur célèbre conjecture sur la répartition du terme d'erreur dans l'approximation par  $p+1$  du nombre de points de la réduction modulo  $p$  d'une courbe elliptique sur  $\mathbf{Q}$ .

**THÉORÈME 1.3** (Katz). — *Lorsque  $q$  tend vers l'infini, les multi-ensembles  $\{\theta_{q,a}\}_{a \in \mathbf{F}_q^\times}$  s'équirépartissent selon la mesure de Sato–Tate, c'est-à-dire, pour toute fonction continue  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$  on a l'égalité*

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin^2 \theta d\theta = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \sum_{a \in \mathbf{F}_q^\times} f(\theta_{q,a}).$$

À nouveau, ce résultat est valable pour n'importe quelle suite de corps finis de cardinaux croissants. On conjecture également que, pour un entier fixe  $a$ , la suite des  $\theta_{p,a}$  s'équidistribue selon la mesure de Sato–Tate lorsque  $p$  tend vers l'infini parmi les nombres premiers ne divisant pas  $a$ , mais même des conséquences faibles de cet énoncé paraissent hors de portée à l'heure actuelle<sup>(2)</sup>.

2. Mentionnons, à titre d'exemple, la *conjecture du changement de signe* : puisque  $\sin^2 \theta$  est symétrique par rapport à  $\theta = \pi/2$  et que les  $\text{Kl}_2(a, p)$  sont tous non nuls, il devrait y avoir asymptotiquement autant de premiers  $p$  pour lesquels la somme de Kloosterman est positive que négative. On n'en sait

## 1.2. Les sommes d’Evans et de Rudnick

Autour de 2003, Evans et Rudnick trouvèrent d’autres sommes exponentielles dépendant d’un caractère multiplicatif qui, d’après leurs expériences numériques, semblent s’équirépartir selon la mesure de Sato–Tate. D’un côté, Evans étudia les sommes

$$S(\chi) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \chi(x) \psi_q\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

qui sont des nombres réels de valeur absolue au plus 2 par l’hypothèse de Riemann sur les courbes. Il s’écrivent donc  $S(\chi) = 2 \cos \theta_{q,\chi}$  pour un unique  $\theta_{q,\chi} \in [0, \pi]$ . Est-il vrai que les multi-ensembles  $\{\theta_{q,\chi}\}_\chi$  s’équirépartissent selon la mesure de Sato–Tate quand  $q$  tend vers l’infini ? Ou, ce qui revient au même, les sommes  $S(\chi)$  s’équirépartissent-elles selon la *mesure du demi-cercle*  $(1/2\pi)\sqrt{4-x^2}dx$  sur l’intervalle  $[-2, 2]$  ?

À la même époque, Rudnick rencontra des sommes semblables dans ses travaux sur le chaos quantique. Décrivons brièvement le contexte, en nous référant à [19], [20] et [26] pour plus de détails. Il s’agit de quantifier le système dynamique obtenu en itérant la transformation du tore  $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  définie par une matrice hyperbolique  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ , des applications connues comme « cat maps » dans la littérature. Soient  $N \geq 1$  un entier et  $\mathcal{H}_N$  l’espace de Hilbert  $L^2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ . On pense à  $N$  comme à l’inverse de la constante de Planck  $\hbar$ , de sorte que la limite semi-classique  $\hbar \rightarrow 0$  devienne  $N \rightarrow \infty$ . Après avoir associé à chaque observable classique  $f: T^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  un opérateur auto-adjoint  $\mathrm{Op}_N(f)$  sur  $\mathcal{H}_N$  (l’observable quantique), une quantification de  $A$  est une suite d’opérateurs unitaires  $U_N(A)$  sur  $\mathcal{H}_N$  vérifiant la formule d’Egoroff

$$U_N(A)^* \mathrm{Op}_N(f) U_N(A) = \mathrm{Op}_N(f \circ A)$$

pour toute observable  $f$ . Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}_N$  formée de vecteurs propres pour l’opérateur  $U_N(A)$ , on sait que la moyenne des espérances  $\langle \mathrm{Op}_N(f) \varphi_i, \varphi_i \rangle$  converge vers  $\int_{T^2} f(x) dx$  lorsque  $N$  tend vers l’infini. La question est de décider quand ceci reste vrai pour chaque terme pris individuellement.

Dans [19], Kurlberg et Rudnick observent que  $A$  admet une quantisation qui ne dépend que de la réduction de la matrice modulo  $2N$ , ce qui leur permet d’introduire une classe d’opérateurs d’origine arithmétique sur  $\mathcal{H}_N$  qu’ils appellent « opérateurs de Hecke ». Le théorème d’*unique ergodicité quantique* est l’énoncé que, si les  $\varphi_i$  sont simultanément des fonctions propres pour  $U_N(A)$  et les opérateurs de Hecke, on a bien

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \mathrm{Op}_N(f) \varphi_i, \varphi_i \rangle = \int_{T^2} f(x) dx$$

pour tout  $i$ . Comment les espérances  $\langle \mathrm{Op}_N(f) \varphi_i, \varphi_i \rangle$  fluctuent-elles autour de la limite ? Puisque l’on s’attend à ce que le terme d’erreur soit génériquement d’ordre  $1/\sqrt{N}$ , il

---

rien ! Dans [7], Fouvry et Michel démontrent des résultats dans cette direction quand la suite des  $p$  est remplacée par une suite de nombres à une quantité  $\geq 2$  de facteurs premiers bornée uniformément.

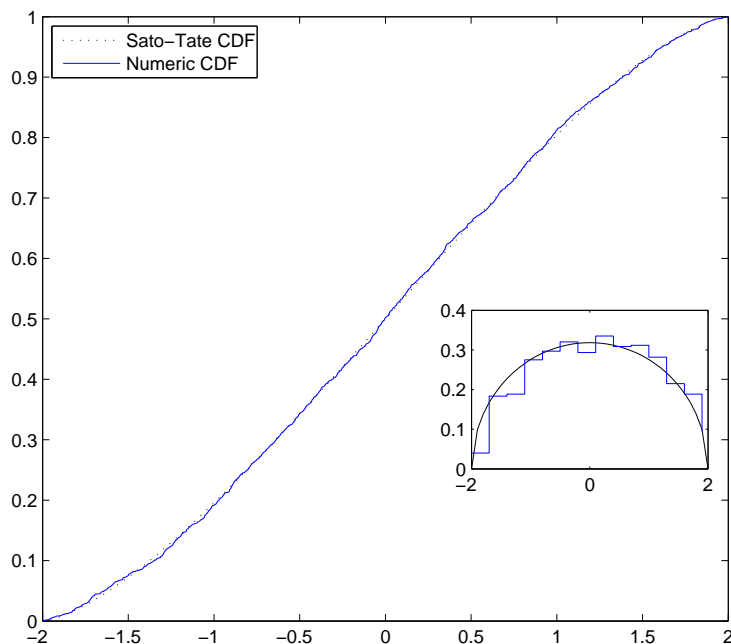


FIGURE 1. Comparaison entre la fonction de répartition des fluctuations pour la matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  et le premier  $p = 1997$  et celle d’une variable aléatoire pour la mesure du demi-cercle, d’après Rosenzweig [25].

est naturel de considérer les fluctuations définies par

$$F_i^{(N)} = \sqrt{N} \left( \langle \text{Op}_N(f) \varphi_i, \varphi_i \rangle - \int_{T^2} f(x) dx \right).$$

Prenons pour  $N$  un nombre premier  $p \geq 3$  tel que la matrice  $A$  soit diagonalisable modulo  $p$ , disons par une matrice de passage  $P$ . Dans ce cas, chaque caractère multiplicatif  $\chi$  de  $\mathbf{F}_p$  donne lieu à une fonction propre  $\varphi_\chi = U_N(P)\chi$  pour  $U_N(A)$  et les opérateurs de Hecke. À un facteur près, les fluctuations des  $\varphi_\chi$  sont les sommes

$$E(\chi) = -\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{x \in \mathbf{F}_p \setminus \{0,1\}} \chi(x) \psi_p\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Si  $\chi$  n’est pas trivial,  $E(\chi)$  est encore un nombre réel compris entre  $-2$  et  $2$ . Des expériences numériques (voir la figure ci-dessus) suggèrent que les  $\{E(\chi)\}_{\chi \neq 1}$  s’équirépartissent selon la mesure du demi-cercle lorsque  $p$  tend vers l’infini. Peut-on le démontrer ?

### 1.3. La méthode $\ell$ -adique

Dans ce texte, nous expliquerons comment un théorème récent de Katz [16] permet entre autres d’apporter une réponse positive aux questions d’Evans et de Rudnick. Le point de départ, désormais classique, consiste à interpréter les sommes exponentielles

comme la trace de Frobenius agissant sur la cohomologie d'un faisceau  $\ell$ -adique sur une variété sur un corps fini. Nous illustrerons la démarche par les sommes de Gauss.

Posons  $k = \mathbf{F}_q$  et fixons une clôture algébrique  $\bar{k}$ . Soient  $\ell$  un nombre premier distinct de  $p$  et  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  une clôture algébrique du corps des nombres  $\ell$ -adiques. Le choix d'un plongement  $\iota: \overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$  induit un isomorphisme entre les clôtures algébriques de  $\mathbf{Q}$  dans  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  et dans  $\mathbf{C}$  par le biais duquel on pourra voir les caractères comme prenant des valeurs dans  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ . Soit donc  $\psi: k \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  un caractère additif non trivial. Considérons une clôture séparable du corps des fractions rationnelles  $k(T)$  et une solution  $U \in k(T)^{\text{sep}}$  de l'équation d'Artin–Schreier  $U - U^q = T$ . L'extension  $k(T, U)$  est galoisienne sur  $k(T)$  de groupe  $k$ , un élément  $a \in k$  opérant par  $U \mapsto U + a$ . Notons  $\mathcal{L}_\psi$  la représentation

$$\text{Gal}(k(T)^{\text{sep}}/k(T)) \longrightarrow \text{Gal}(k(T, U)/k(T)) \cong k \xrightarrow{\psi} \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

obtenue par composition de la surjection canonique avec le caractère  $\psi$ .

Identifiant  $k(T)$  au corps de fonctions de la droite projective  $\mathbb{P}_k^1$ , on voit que  $\mathcal{L}_\psi$  est non ramifiée en dehors de l'infini. Par suite, pour chaque point  $x$  de la droite affine  $\mathbb{A}_k^1$  à valeurs dans une extension finie  $E$  de  $k$ , la classe de conjugaison  $\text{Frob}_{E,x}$  dans le groupe  $\text{Gal}(k(T)^{\text{sep}}/k(T))$  définie par le Frobenius géométrique de  $\text{Gal}(\bar{k}/E)$  agit sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  au travers de la représentation  $\mathcal{L}_\psi$ . Pour calculer cette action, notons  $n$  le degré de  $E$  sur  $k$ . Si  $y \in \bar{k}$  satisfait à l'équation  $y - y^q = x$ , alors  $y^{q^j} = y^{q^{j-1}} - x^{q^{j-1}}$  pour tout entier  $j \geq 1$ . Sommant sur les  $j = 1, \dots, n$ , on trouve que la substitution de Frobenius est donnée par  $y \mapsto y^{q^n} = y - \text{Tr}_{E/k}(x)$ . Le Frobenius géométrique étant son inverse, on en déduit après application du caractère  $\psi$  que la classe de conjugaison  $\text{Frob}_{E,x}$  agit sur l'espace de la représentation  $\mathcal{L}_\psi$  comme la multiplication par  $\psi(\text{Tr}_{E/k}(x))$ .

De même, à partir de l'équation de Kummer  $U^{1-q} = T$ , on peut associer à chaque caractère multiplicatif  $\chi: k^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  une représentation  $\mathcal{L}_\chi$  de  $\text{Gal}(k(T)^{\text{sep}}/k(T))$  à valeurs dans  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ , cette fois-ci ramifiée en 0 et l'infini, telle que la classe de conjugaison  $\text{Frob}_{E,x}$  agisse par multiplication par  $\chi(\text{N}_{E/k}(x))$  pour tout  $x \in E^\times$ . En termes de ces représentations, la somme de Gauss s'écrit

$$g(\psi, \chi) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \text{Tr}(\text{Frob}_{E,x} | \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_\chi).$$

Dans le langage plus géométrique que l'on adoptera ici,  $\mathcal{L}_\psi$  et  $\mathcal{L}_\chi$  sont des systèmes locaux  $\ell$ -adiques de rang un sur  $\mathbb{A}_k^1$  et sur  $\mathbb{G}_{m,k}$  respectivement. On notera encore  $\mathcal{L}_\psi$  la restriction à  $\mathbb{G}_{m,k}$ . Pour des raisons pour l'instant mystérieuses, il est préférable de travailler avec l'objet  $M = \mathcal{L}_\psi(1/2)[1]$ . Le symbole  $(1/2)$  désigne une *demi-torsion* à la Tate dont l'effet est de multiplier les traces de Frobenius par  $1/\sqrt{q}$ , et le décalage  $[1]$  indique que l'on regarde  $\mathcal{L}_\psi(1/2)$  non pas comme un faisceau mais comme un complexe de faisceaux concentré en degré  $-1$ , ce qui change le signe des traces. En d'autres termes,  $M$  est un objet de la catégorie dérivée  $D_c^b(\mathbb{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  de faisceaux  $\ell$ -adiques sur  $\mathbb{G}_{m,k}$ , le cadre naturel pour parler de cohomologie. Qui plus est, le décalage fait

que  $M$  appartient à une sous-catégorie *abélienne* formée d’objets avec des propriétés remarquables que l’on appelle *faisceaux pervers*, même s’il s’agit juste de complexes.

Étant donné une extension finie  $E$  de  $k$  et un caractère multiplicatif  $\chi: E^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ , l’objet  $M \otimes \mathcal{L}_\chi$  est encore un faisceau pervers sur  $\mathbb{G}_{m,E}$  dont les groupes de cohomologie à support compact s’annulent en degré non nul. La cohomologie à support compact en degré zéro est un espace vectoriel de dimension un sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$

$$\omega_\chi(M) = H_c^0(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, M \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

muni d’une action du groupe  $\text{Gal}(\bar{k}/E)$ , notamment du Frobenius géométrique  $F_E$ . La formule des traces de Grothendieck est dans ce cas l’égalité

$$\text{Tr}(F_E | \omega_\chi(M)) = \sum_{x \in E^\times} \text{Tr}(\text{Frob}_{E,x} | M \otimes \mathcal{L}_\chi) = -\frac{1}{\sqrt{|E|}} \sum_{x \in E^\times} \psi(x) \chi(x).$$

La distinction selon que le caractère  $\chi$  soit trivial ou non se reflète dans l’action de Frobenius sur  $\omega_\chi(M)$ , qui est en l’occurrence réduite à la multiplication par un nombre  $\ell$ -adique. À travers le plongement  $\iota: \overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$ , on peut parler de la valeur absolue de ce nombre : elle est égale à 1 si et seulement si  $\chi$  n’est pas trivial. Pour des objets  $M$  plus généraux, on dira qu’un caractère multiplicatif  $\chi$  est *bon* pour  $M$  si toutes les valeurs propres de  $F_E$  agissant sur  $\omega_\chi(M)$  sont unitaires.

#### 1.4. Convolution et équirépartition

L’étape suivante consiste à introduire une opération sur les faisceaux relevant le produit des sommes exponentielles ; c’est là que la structure de groupe sur  $\mathbb{G}_{m,k}$  intervient. Pour ce faire, on définit sur la catégorie dérivée  $D_c^b(\mathbb{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  un produit de *convolution*

$$M \star_! N = Rm_!(\text{pr}_1^* M \otimes \text{pr}_2^* N),$$

où  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  désignent les projections de  $\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{G}_{m,k}$  sur les deux facteurs, et  $m$  la loi de multiplication. En procédant de cette manière, on se heurte tout de suite à la difficulté que ce produit ne préserve pas les faisceaux pervers, mais il y a moyen de la résoudre en se restreignant à une sous-catégorie convenable  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_{m,k})$  de  $D_c^b(\mathbb{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ . Un second point technique est que l’objet  $M \star_! N$  doit être remplacé par un quotient  $M \star_{\text{int}} N$  que l’on appelle convolution *intermédiaire*. Si  $M$  et  $N$  sont des faisceaux pervers dans  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_{m,k})$  pour lesquels un caractère  $\chi$  est bon, on a un isomorphisme

$$\omega_\chi(M \star_{\text{int}} N) \cong \omega_\chi(M) \otimes \omega_\chi(N)$$

compatible à l’action de Frobenius. D’après Gabber et Loeser [8], avec la convolution intermédiaire pour produit tensoriel,  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_{m,k})$  a la structure d’une catégorie *tannakienne*. L’objet neutre est le faisceau gratte-ciel supporté en l’élément neutre 1 et le dual  $M^\vee$  est le tiré en arrière du dual de Verdier  $\mathbb{D}(M)$  par l’inversion  $x \mapsto x^{-1}$ .

Concrètement, on se servira ainsi de cette information. Considérons la sous-catégorie  $\langle M \rangle^\otimes$  de  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_{m,k})$  formée des objets qui s’obtiennent à partir de  $M$  en itérant les



opérations produit tensoriel, dual, somme directe et sous-quotient, autrement dit qui sont des sous-quotients d'une *construction tensorielle*  $N = \bigoplus M^{\otimes r_i} \otimes (M^\vee)^{\otimes s_i}$ . Les automorphismes linéaires de  $\omega_\chi(M)$  agissent naturellement sur tous les  $\omega_\chi(N)$ . Soit

$$G_{M,\chi} \subseteq \mathrm{GL}(\omega_\chi(M))$$

le sous-groupe de ceux laissant globalement stables les images par le foncteur  $\omega_\chi$  de n'importe quel sous-quotient de  $N$ . Par la théorie tannakienne, c'est un groupe algébrique sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  dont la catégorie des représentations de dimension finie est équivalente à  $\langle M \rangle^\otimes$ . On aura aussi besoin de prendre en compte le faisceau pervers sur  $\mathbb{G}_{m,\bar{k}}$  déduit de  $M$  par extension des scalaires. Comme ses constructions tensorielles ont plus de sous-quotients, le groupe correspondant est *a priori* plus petit ; pour les distinguer, on notera  $G_{\mathrm{arith},M,\chi}$  celui sur  $k$  (arithmétique) et  $G_{\mathrm{geom},M,\chi}$  celui sur  $\bar{k}$  (géométrique).

Le Frobenius  $F_E$  est un automorphisme de  $\omega_\chi(M)$  vérifiant la propriété de stabilité ci-dessus et définit donc un élément  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}$  dans le groupe  $G_{\mathrm{arith},M,\chi}$ . Si l'on change de caractère, on change de groupe. La dépendance en  $\chi$  est la même que celle du groupe fondamental d'un espace topologique en le point base : tous les  $G_{\mathrm{arith},M,\chi}$  sont isomorphes entre eux par des isomorphismes uniques à des automorphismes intérieurs près. On peut alors fixer un caractère  $\chi_0$  et voir les différents  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}$  comme des classes de conjugaison dans le même groupe  $G_{\mathrm{arith},M,\chi_0}$ , que l'on notera simplement  $G_{\mathrm{arith},M}$ . On ne sait pas si  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}$  est diagonalisable mais, quitte à prendre sa semisimplification  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}^{\mathrm{ss}}$  au sens de la décomposition de Jordan, on obtient une classe de conjugaison semisimple dans  $G_{\mathrm{arith},M}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  avec des valeurs propres unitaires, que l'on peut ensuite regarder dans  $G_{\mathrm{arith},M}(\mathbf{C})$  via le plongement  $\iota: \overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$ .

Les propriétés des objets d'une catégorie tannakienne se traduisent en des propriétés de leurs groupes et *vice versa*. Par exemple, si  $M$  est somme directe d'objets simples, alors le groupe  $G_{\mathrm{arith},M}$  est réductif car il possède une représentation fidèle et complètement réductible. Supposons que c'est le cas et choisissons un sous-groupe compact maximal  $K$  du groupe de Lie complexe  $G_{\mathrm{arith},M}(\mathbf{C})$ . Chaque élément dans  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}^{\mathrm{ss}}$  est alors conjugué à un élément dans  $K$ , qui est à son tour bien défini à conjugaison près par un élément de  $K$ . On en déduit une classe de conjugaison  $\theta_{E,\chi}$  dans  $K$  dont les traces  $\mathrm{Tr}(\theta_{E,\chi})$  ne sont rien d'autre que les sommes exponentielles

$$S(M, E, \chi) = \sum_{x \in E^\times} \chi(x) \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | M)$$

que l'on souhaite étudier. On y pense comme aux transformées de Fourier, relatives aux caractères  $\chi$ , de la fonction trace  $x \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | M)$  sur le groupe multiplicatif  $E^\times$ .

**THÉORÈME 1.4 (Katz).** — *Soit  $M$  un faisceau pervers dans  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_{m,k})$ . Supposons que  $M$  est  $\iota$ -pur de poids zéro, semisimple, et que les groupes  $G_{\mathrm{geom},M}$  et  $G_{\mathrm{arith},M}$  coïncident. Lorsque le degré des extensions  $E/k$  tend vers l'infini, les multi-ensembles  $\{\theta_{E,\chi}\}_\chi$  bon s'équirépartissent dans l'espace des classes de conjugaison dans  $K$  selon la mesure induite par la mesure de Haar normalisée.*

En particulier, les sommes  $S(M, E, \chi)$  varient comme les traces de matrices aléatoires dans  $K$ . Il ne reste plus qu'à calculer le groupe  $G_{\text{arith}, M}$ . L'avantage du point de vue tannakien est que l'on dispose de maintes techniques pour le faire. On cherche d'abord des bornes par le haut en étudiant la géométrie de  $M$  et de ses constructions tensorielles, puis des bornes par le bas en exhibant des éléments explicites dans  $G_{\text{arith}, M}$ . Une fois ces contraintes obtenues, la théorie des représentations permet souvent de conclure qu'il n'y a qu'un seul groupe les satisfaisant. Dans le cas des sommes de Gauss,  $G_{\text{geom}, M}$  est par définition un sous-groupe de  $\text{GL}(1)$ . Comme aucune puissance de convolution de  $M$  n'est égale à l'objet neutre, il s'agit forcément de  $\text{GL}(1)$  tout entier. On a donc  $G_{\text{geom}, M} = G_{\text{arith}, M} = \text{GL}(1)$  et  $K$  est le cercle unité  $S^1$ , si bien que l'on retrouve le théorème 1.1 du début. Quant aux objets associés aux sommes d'Evans et de Rudnick, on verra que leurs groupes arithmétiques et géométriques sont dans les deux cas égaux à  $\text{SL}(2)$ . L'équirépartition des angles  $\theta_{q, \chi}$  selon la mesure de Sato–Tate en découle.

Le texte est organisé comme suit. Le numéro 2 contient des rappels des résultats sur les faisceaux  $\ell$ -adiques qui seront utilisés au long du texte ; j'ai essayé de les rendre aussi accessibles que possible. Dans le numéro 3, on présente le théorème d'équirépartition de Deligne, ainsi que ses applications aux sommes de Kloosterman. Enfin, le numéro 4 est consacré aux résultats de la monographie [16], notamment le théorème 1.4 ci-dessus.

*Remerciements* — Ils vont tout d'abord à Nick Katz pour la joie des livres orange, renouvelée à chaque lecture ! Je tiens à remercier aussi Olivier Benoist, Brian Conrad, Nick Katz, Emmanuel Kowalski, Corentin Perret-Gentil, Lior Rosenzweig et Zeév Rudnick pour l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de la rédaction de ce texte.

## 2. RAPPELS SUR LES FAISCEAUX $\ell$ -ADIQUES

Dans ce numéro, on fait un tour rapide de la théorie des systèmes locaux et des faisceaux constructibles  $\ell$ -adiques. On rappelle notamment la notion de poids et le résultat principal de Weil II, qui sera plus tard l'outil essentiel pour obtenir les majorations des sommes exponentielles requises par le critère d'équirépartition de Weyl.

### 2.1. Groupe fondamental étale

Soit  $X$  un schéma connexe. Notons  $\mathbf{Fét}_X$  la catégorie ayant pour objets les revêtements finis étales  $Y \rightarrow X$  et pour flèches les morphismes de  $X$ -schémas  $Y \rightarrow Y'$ . Soit  $\xi$  un *point géométrique* de  $X$ , *i.e.* un morphisme  $\xi: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$  où  $\Omega$  est un corps algébriquement clos. En associant à chaque  $Y \rightarrow X$  l'ensemble sous-jacent à la fibre  $Y_\xi = Y \times_X \text{Spec}(\Omega)$ , on obtient un foncteur

$$\text{Fib}_\xi: \mathbf{Fét}_X \longrightarrow \mathbf{Ensembles\ finis}.$$

Dans [1], Grothendieck définit *le groupe fondamental étale avec point base*  $\xi$  comme le groupe  $\pi_1(X, \xi)$  des automorphismes de  $\text{Fib}_\xi$ . Rappelons qu'un tel automorphisme est une famille  $(\sigma_{Y_\xi})_{Y \rightarrow X}$  de permutations  $\sigma_{Y_\xi}$  des ensembles finis  $Y_\xi$  telle que  $\sigma_{Y'_\xi} = f \circ \sigma_{Y_\xi}$  pour tout morphisme de  $X$ -schémas  $f: Y \rightarrow Y'$ . Par suite,  $\pi_1(X, \xi)$  est un groupe *profini*, muni en particulier d'une topologie. Comme dans la théorie de Galois, on a

$$\pi_1(X, \xi) \cong \varprojlim \text{Aut}_X(Y),$$

la limite étant prise sur les revêtements finis étales *galoisiens*, ceux pour lesquels le schéma  $Y$  est connexe et le groupe  $\text{Aut}_X(Y)$  agit transitivement sur  $Y_\xi$ .

Puisque  $X$  est supposé connexe, les foncteurs fibre  $\text{Fib}_{\xi_1}$  et  $\text{Fib}_{\xi_2}$  définis par deux points géométriques  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont isomorphes. Le choix d'un isomorphisme, que l'on appelle parfois *chemin* par analogie avec la topologie, induit un isomorphisme continu

$$\pi_1(X, \xi_1) \simeq \pi_1(X, \xi_2)$$

qui ne dépend du chemin qu'à un automorphisme intérieur près. Par conséquent, si le groupe  $\pi_1(X, \xi)$  est abélien, il est indépendant du choix de  $\xi$  et on peut, sans ambiguïté, le noter simplement  $\pi_1(X)$ .

La formation du groupe fondamental est *covariante* : si  $f: X \rightarrow X'$  est un morphisme de schémas et  $Y' \rightarrow X'$  un revêtement fini étale, le changement de base  $Y' \times_{X'} X$  est encore fini étale sur  $X$ , d'où un foncteur  $\mathbf{Fét}_{X'} \rightarrow \mathbf{Fét}_X$ . Étant donné un point géométrique  $\xi$  sur  $X$ , ce foncteur commute à  $\text{Fib}_\xi$  et  $\text{Fib}_{f \circ \xi}$ , induisant un homomorphisme continu  $f_*: \pi_1(X, \xi) \rightarrow \pi_1(X', f \circ \xi)$ . Pour un autre choix de point base  $\xi'$  sur  $X'$ , on peut encore parler de l'homomorphisme continu

$$f_*: \pi_1(X, \xi) \rightarrow \pi_1(X', \xi'),$$

mais ceci n'a un sens qu'à conjugaison près. C'est cette functorialité qui va nous permettre de définir plus bas les traces de Frobenius.

*Exemple 2.1.* — Si  $X$  est le spectre d'un corps  $k$ , un point géométrique  $\xi$  est un corps algébriquement clos  $L$  contenant  $k$ , et le groupe fondamental  $\pi_1(X, \xi)$  s'identifie au groupe de Galois absolu  $\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$ , où  $k^{\text{sep}}$  désigne la clôture séparable de  $k$  dans  $L$ . En particulier, si  $k$  est un corps fini à  $q$  éléments, ce groupe est canoniquement isomorphe à la complétion profinie  $\widehat{\mathbf{Z}}$  de  $\mathbf{Z}$ , avec générateur la substitution de Frobenius  $x \mapsto x^q$ . On appellera *Frobenius géométrique* l'inverse  $F_k$  de ce générateur. Pour une extension  $E$  de degré  $n$  sur  $k$ , l'homomorphisme induit par  $\text{Spec}(E) \rightarrow \text{Spec}(k)$  envoie  $F_E$  sur  $F_k^n$ .

Soient  $k$  un corps,  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$  et  $X$  une variété géométriquement connexe sur  $k$ . On notera  $X_{\bar{k}}$  la variété sur  $\bar{k}$  déduite par extension des scalaires. Pour tout  $\xi: \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow X_{\bar{k}}$ , on a d'après un théorème de Grothendieck [1] une suite exacte

$$(3) \quad 1 \longrightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}, \xi) \longrightarrow \pi_1(X, \xi) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1,$$

où les flèches non triviales sont induites par l'extension des scalaires  $X_{\bar{k}} \rightarrow X$  et le morphisme structurel  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ . En particulier, si  $k$  est un corps fini, on dispose d'une application *degré*  $\pi_1(X, \xi) \rightarrow \widehat{\mathbf{Z}}$ .

Voici la description galoisienne du groupe fondamental d'une courbe. Soit  $C$  une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps parfait  $k$ , avec corps de fonctions  $K = k(C)$  et point générique  $\eta: \text{Spec}(K) \rightarrow C$ . Fixons une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$  et notons  $\bar{\eta}$  le point géométrique au-dessus de  $\eta$  qu'elle définit. Chaque point fermé  $x$  de  $C$  donne lieu à une valuation discrète  $v: K^\times \rightarrow \mathbf{Z}$  de corps résiduel  $\kappa(x)$ . Soit  $K_v$  le complété de  $K$  par rapport à  $v$ . Le choix d'un paramètre local  $t$  en  $x$  induit un isomorphisme entre  $K_v$  et le corps des séries de Laurent  $\kappa(x)((t))$ . De plus,  $v$  se prolonge en une valuation discrète  $\bar{v}$  sur  $K^{\text{sep}}$  et deux tels prolongements sont conjugués sous l'action de  $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ . Choisir  $\bar{v}$  revient à choisir un point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$ . Le *groupe de décomposition* de  $\bar{v}$  est le stabilisateur

$$D_{\bar{x}} = \{g \in \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \mid \bar{v} \circ g = \bar{v}\},$$

que l'on peut identifier au groupe de Galois de l'extension locale  $K_{\bar{v}}^{\text{sep}}/K_v$ . Par passage aux corps résiduels, on obtient une surjection  $D_{\bar{x}} \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/\kappa(x))$ , où  $\bar{k}$  est la clôture algébrique de  $k$  dans  $\bar{K}$ . Son noyau est le *groupe d'inertie*  $I_{\bar{x}}$ .

PROPOSITION 2.2. — *Soit  $U$  un ouvert non vide de  $C$ . Le groupe fondamental étale de  $U$  avec point base  $\bar{\eta}$  est le quotient de  $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$  par le plus petit sous-groupe fermé distingué contenant  $I_{\bar{x}}$  pour tout  $x$  dans  $U$ .*

En particulier, le groupe fondamental d'un ouvert de la droite projective  $\mathbb{P}_k^1$  s'identifie à un quotient de  $\text{Gal}(k(T)^{\text{sep}}/k(T))$ . C'est le point de vue que l'on a adopté dans l'introduction pour définir les représentations  $\mathcal{L}_\psi$  et  $\mathcal{L}_\chi$ .

## 2.2. Systèmes locaux $\ell$ -adiques et traces de Frobenius

Dorénavant,  $k$  désigne un corps fini à  $q$  éléments,  $\ell$  un nombre premier différent de sa caractéristique et  $X$  une variété lisse et géométriquement connexe sur  $k$ , de point générique  $\eta$ . D'après le paragraphe précédent, pour tout point fermé  $x: \text{Spec}(E) \rightarrow X$ , on dispose d'un homomorphisme continu

$$x_*: \text{Gal}(\bar{k}/E) \longrightarrow \pi_1(X, \bar{\eta})$$

bien défini à un automorphisme intérieur de  $\pi_1(X, \bar{\eta})$  près. On notera  $\text{Frob}_{E,x}$  la *classe de conjugaison* dans  $\pi_1(X, \bar{\eta})$  obtenue en prenant l'image du Frobenius géométrique  $F_E$ . Avec la notation de 2.1, si  $X$  est une courbe,  $\text{Frob}_{E,x}$  est l'image de  $F_E$  par

$$\text{Gal}(\bar{k}/E) \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/\kappa(x)) \cong D_{\bar{x}}/I_{\bar{x}} \hookrightarrow \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)/I_{\bar{x}} \longrightarrow \pi_1(X, \bar{\eta}).$$

Rappelons que la définition de  $D_{\bar{x}}$  requiert le choix d'un point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$ ; c'est pourquoi on obtient seulement une classe de conjugaison.

DÉFINITION 2.3. — Un système local  $\ell$ -adique  $\mathcal{L}$  de rang  $r$  sur  $X$  est la donnée d'un espace vectoriel  $\mathcal{L}_{\bar{\eta}}$  de dimension  $r$  sur  $\bar{\mathbf{Q}}_{\ell}$  et d'un homomorphisme continu

$$\rho: \pi_1(X, \bar{\eta}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{L}_{\bar{\eta}}).$$

Soit  $\mathcal{L}$  un système local  $\ell$ -adique de rang  $r$  sur  $X$ . Puisque le groupe profini  $\pi_1(X, \bar{\eta})$  est compact, moyennant le choix d'une base de  $\mathcal{L}_{\bar{\eta}}$ , l'image de  $\rho$  est un sous-groupe compact de  $\mathrm{GL}(r, \bar{\mathbf{Q}}_{\ell})$ . Un tel sous-groupe est toujours contenu dans  $\mathrm{GL}(r, E_{\lambda})$  pour une extension finie  $E_{\lambda}$  de  $\mathbf{Q}_{\ell}$ . On peut même choisir une base de  $\mathcal{L}_{\bar{\eta}}$  de sorte que  $\rho$  prenne des valeurs dans  $\mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_{E_{\lambda}})$ , où  $\mathcal{O}_{E_{\lambda}}$  désigne l'anneau des entiers [17, §9.0.7].

L'image de  $\mathrm{Frob}_{E,x}$  par la représentation  $\rho$  est une classe de conjugaison dans  $\mathrm{GL}(\mathcal{L}_{\bar{\eta}})$ . Sa trace est donc un élément bien défini de  $\bar{\mathbf{Q}}_{\ell}$  que l'on notera

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | \mathcal{L}).$$

Les opérations usuelles sur les représentations (produit tensoriel, dual, etc.) fournissent de nouveaux systèmes locaux dont les fonctions trace s'expriment en termes des anciennes. Par exemple, le produit tensoriel satisfait

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | \mathcal{L}_1) \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | \mathcal{L}_2)$$

et, si  $f: Y \rightarrow X$  est un morphisme de  $k$ -variétés lisses, le système local  $f^*\mathcal{L}$  sur  $Y$  donné par la représentation  $\rho \circ f_*$  a traces de Frobenius

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,y} | f^*\mathcal{L}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,f(y)} | \mathcal{L})$$

pour tout point fermé  $y$  dans  $Y$ .

*Exemple 2.4.* — Soit  $\alpha$  une unité dans l'anneau des entiers de  $\bar{\mathbf{Q}}_{\ell}$ . L'unique homomorphisme continu  $\widehat{\mathbf{Z}} \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_{\ell}^{\times}$  qui envoie 1 sur  $\alpha$  définit un système local  $\ell$ -adique de rang un sur  $\mathrm{Spec}(k)$ ; d'après la remarque ci-dessus, ils sont tous de cette forme. Par composition avec le degré  $\pi_1(X, \xi) \rightarrow \widehat{\mathbf{Z}}$ , on obtient un système local  $\ell$ -adique de rang un sur  $X$ . Comme l'image de  $\mathrm{Frob}_{E,x}$  par la représentation associée est  $\alpha^{|E:k|}$ , il sera noté  $\alpha^{\mathrm{deg}}$ . Au vu de la suite exacte (3), les  $\alpha^{\mathrm{deg}}$  sont précisément les caractères du groupe fondamental dont la restriction à  $\pi_1(X_{\bar{k}}, \xi)$  est triviale. Si  $\alpha = q^n$  pour un entier  $n$ , on écrit  $\bar{\mathbf{Q}}_{\ell}(-n)$  plutôt que  $(q^n)^{\mathrm{deg}}$ . Si  $\alpha \in \bar{\mathbf{Q}}_{\ell}$  vérifie  $\alpha^2 = q^{-1}$ , les traces du système local  $\mathcal{L} \otimes \alpha^{\mathrm{deg}}$ , que l'on notera  $\mathcal{L}(1/2)$ , sont celles de  $\mathcal{L}$  multipliées par  $|E|^{-1/2}$ ; c'est la *demi-torsion à la Tate* de l'introduction.

*Exemple 2.5.* — Soit  $G$  un schéma en groupes commutatif lisse et connexe sur  $k$ . La loi de groupe sera notée additivement. Soit  $F_G$  le morphisme de Frobenius absolu, *i.e.* le morphisme de  $k$ -schémas  $F_G: G \rightarrow G$  qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et l'application  $x \mapsto x^q$  sur le faisceau structural  $\mathcal{O}_G$ . L'« isogénie de Lang »

$$\mathrm{id} - F_G: G \rightarrow G$$

est un revêtement fini étale galoisien de groupe  $G(k)$ . Si  $G$  est le groupe additif, c'est la *revêtement d'Artin–Schreier*  $x \mapsto x - x^q$  de la droite affine  $\mathbb{A}_k^1$  et, si  $G$  est le groupe multiplicatif, le *revêtement de Kummer*  $x \mapsto x^{1-q}$  de  $\mathbb{G}_{m,k}$ .

Étant donné un caractère  $\varphi: G(k) \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ , on définit un système local  $\ell$ -adique  $\mathcal{L}_\varphi$  de rang un sur  $G$  comme la représentation

$$\pi_1(G, \overline{\eta}) \longrightarrow G(k) \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

obtenue en composant la surjection canonique avec le caractère  $\varphi$ . Plus généralement, pour tout morphisme de  $k$ -schémas  $f: X \rightarrow G$ , on obtient un système local de rang un  $f^*\mathcal{L}_\varphi$  sur  $X$  qu'il est coutumier de noter  $\mathcal{L}_{\varphi(f)}$ . Pour chaque point  $x$  de  $X$  à valeurs dans une extension finie  $E$  de  $k$ , en raisonnant comme dans l'introduction, on trouve

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | \mathcal{L}_{\varphi(f)}) = \varphi(\mathrm{Tr}_{E/k}^G f(x)),$$

où le symbole  $\mathrm{Tr}_{E/k}^G$  désigne la trace au sens de la somme dans le groupe abélien  $G(E)$  : c'est la « vraie » trace  $\mathrm{Tr}_{E/k}$  si  $G$  est le groupe additif, tandis que  $\mathrm{Tr}_{E/k}^{\mathbb{G}_m} = N_{E/k}$ .

*Exemple 2.6.* — Soit  $f: \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{A}^1$  la fonction  $x \mapsto x - x^{-1}$ . Le système local  $\mathcal{L}_{\psi_q(f)}$  induit par le caractère additif  $\psi_q: \mathbf{F}_q \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}^\times$  a trace de Frobenius  $\psi_q(x - x^{-1})$  en  $x \in \mathbf{F}_q^\times$ . Les sommes d'Evans sont donc égales à

$$S(\chi) = - \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathbf{F}_q,x} | \mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\psi_q}(\tfrac{1}{2})).$$

De même, en prenant pour  $f: \mathbb{G}_m \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{A}^1$  la fonction  $\frac{x+1}{x-1}$ , les sommes de Rudnick peuvent se récrire en termes du système local  $\mathcal{L}_{\psi_q(f)}$ .

Le cadre des systèmes locaux  $\ell$ -adiques, par opposition aux faisceaux constructibles que l'on introduira dans le paragraphe suivant, est peu adapté aux méthodes cohomologiques. Par exemple, si  $\chi: k^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  est un caractère et  $f: X \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$  un morphisme de  $k$ -variétés,  $\chi(f(x))$  est bien la trace de Frobenius en  $x$  du système local  $\mathcal{L}_{\chi(f)}$  sur  $X$ , mais il est souvent plus commode d'utiliser l'égalité

$$\sum_{x \in X(k)} \chi(f(x)) = \sum_{t \in k^\times} \chi(t) |f^{-1}(t)|$$

et de voir  $t \mapsto |f^{-1}(t)|$  comme une fonction trace sur  $\mathbb{G}_{m,k}$ . Ceci correspond à étudier la variation en  $t$  de la cohomologie des fibres  $f^{-1}(t)$  et on doit s'attendre à ce que seule la restriction à un ouvert de lissité de  $f$  soit la trace d'un système local.

### 2.3. Faisceaux constructibles, poids et cohomologie

Vers la fin des années 50, Grothendieck définit une « topologie » sur les schémas où les « ouverts » sont les morphismes étales. Si  $A$  est un anneau de torsion, par exemple  $\mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}$ , on peut parler de faisceaux localement constants, aussi appelés *lisses*, et de faisceaux constructibles de  $A$ -modules sur  $X$ . Par un double passage à la limite, d'abord

sur  $n$ , puis sur les extensions finies de  $\mathbf{Q}_\ell$ , on dégage la bonne notion de  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -faisceau constructible. C'est une longue histoire et on ne se contentera que de quelques aperçus.

Soit  $\mathcal{F}$  un  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -faisceau constructible sur  $X$ . Pour chaque point géométrique  $\xi$  de  $X$ , la fibre  $\mathcal{F}_\xi$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ . Si le faisceau  $\mathcal{F}$  est lisse sur  $X$  et  $\bar{\eta}$  désigne un point géométrique générique,  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  est une représentation continue du groupe fondamental  $\pi_1(X, \bar{\eta})$ . En fait, le foncteur  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  est une équivalence de catégories entre les  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -faisceaux lisses et les systèmes locaux  $\ell$ -adiques sur  $X$ . Étant donné un point fermé  $x$  de  $X$  à valeurs dans  $E$  et un point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$ , on peut voir la fibre  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  comme un faisceau sur  $\text{Spec}(E)$ , d'où une action de  $F_E$ .

Soient  $C$  une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur  $k$ . Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau lisse sur un ouvert non vide  $V \subseteq C$ , pour tout point fermé  $x \in C$ , le groupe de décomposition  $D_{\bar{x}}$  agit sur  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  au travers de la flèche  $D_{\bar{x}} \rightarrow \pi_1(V, \bar{\eta})$ . On en déduit une action du groupe d'inertie  $I_{\bar{x}}$  pour tout  $x \in C \setminus V$ , celle de  $I_{\bar{x}}$  pour  $x \in V$  étant triviale par la description galoisienne du groupe fondamental. Concrètement, un  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -faisceau constructible  $\mathcal{F}$  sur une courbe  $U$  est la donnée :

- d'un ouvert non vide  $V \hookrightarrow U$  et d'un faisceau  $\ell$ -adique lisse  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  sur  $V$  correspondant à une représentation continue  $\pi_1(V, \bar{\eta}) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$ ,
- pour chaque point fermé  $u \in U \setminus V$ , d'une représentation continue de  $\text{Gal}(\bar{k}/\kappa(u))$  dans un  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{F}_{\bar{u}}$ ,
- des *flèches de spécialisation*  $\text{Gal}(\bar{k}/\kappa(u))$ -équivariantes  $\text{sp}_{\bar{u}, \bar{\eta}}: \mathcal{F}_{\bar{u}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{I_{\bar{u}}}$  (les données de recollement).

Quelques opérations naturelles sur les faisceaux constructibles, par exemple les images directes par une immersion ouverte, admettent également une description en ces termes. Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau constructible sur  $U$  et  $j: U \hookrightarrow U'$  une immersion ouverte. Le *prolongement par zéro*  $j_!\mathcal{F}$  est le faisceau constructible sur  $U'$  qui coïncide avec  $\mathcal{F}$  sur  $U$  et qui a des fibres nulles pour tout point fermé  $x$  dans le complémentaire. Les fibres du faisceau *image directe*  $j_*\mathcal{F}$  sont  $(j_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{I_{\bar{x}}}$ , avec flèche de spécialisation l'identité, en tout point fermé  $x$  dans  $U' \setminus U$ .

Soit  $X$  une variété lisse et géométriquement connexe, purement de dimension  $d$ , sur un corps fini  $k$ . À un  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -faisceau constructible  $\mathcal{F}$  sur  $X$  on associe des *groupes de cohomologie*  $H^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$  et de *cohomologie à support compact*  $H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ . Ce sont des espaces vectoriels de dimension finie sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ , munis d'une action continue de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ , qui s'annulent en degrés  $i < 0$  et  $i > 2d$ . Pour chaque  $i$ , il y a une flèche canonique d'« oubli des supports »  $H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$  qui est un isomorphisme quand  $X$  est propre. Si le faisceau  $\mathcal{F}$  est lisse, on a

$$H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{\bar{\eta}})^{\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\eta})} \quad H_c^{2d}(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{\bar{\eta}})_{\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\eta})}(-d)$$

et le groupe de Galois opère sur ces espaces par le biais de l'action de  $\pi_1(X, \bar{\eta})$  sur  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  et de l'identification  $\text{Gal}(\bar{k}/k) = \pi_1(X, \bar{\eta})/\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\eta})$ . En général, le faisceau constructible  $\mathcal{F}$

peut avoir des sections globales ponctuelles non triviales : dans la description ci-dessus, elles correspondent aux éléments dans le noyau des flèches de spécialisation.

Le lien entre les sommes exponentielles et l'action du Frobenius géométrique  $F_k$  sur la cohomologie à support compact est fourni par la formule des traces [10] :

THÉORÈME 2.7 (Formules des traces de Grothendieck). — *Pour toute extension finie  $E$  de  $k$ , on a l'égalité*

$$\sum_{x \in X(E)} \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \mathrm{Tr}(F_E | H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})).$$

Exemple 2.8. — Soient  $\psi: k \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  un caractère additif et  $\pi: \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  le revêtement d'Artin–Schreier. Vu comme faisceau lisse, le système local  $\mathcal{L}_\psi$  est la composante  $\psi$ -isotopique de  $\pi_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ , d'où une identification

$$H_c^i(\mathbb{A}_{\bar{k}}^1, \mathcal{L}_\psi) = H_c^i(\mathbb{A}_{\bar{k}}^1, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^\psi.$$

Puisque la cohomologie  $H_c^i(\mathbb{A}_{\bar{k}}^1, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est nulle pour  $i = 0, 1$  et que  $H_c^2(\mathbb{A}_{\bar{k}}^1, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = \overline{\mathbf{Q}}_\ell(-1)$ , avec action triviale du groupe de Galois du revêtement, le membre droit de la formule des traces vaut  $q$  si  $\psi$  est trivial et zéro autrement ; c'est l'interprétation cohomologique de la relation d'orthogonalité des caractères.

La formule des traces n'acquiert toute sa force qu'en combinaison avec des estimées sur les valeurs propres de l'endomorphisme  $F_E$  : c'est le formalisme des poids de la cohomologie. Pour pouvoir parler de la valeur absolue de ces valeurs propres, on fixe un plongement  $\iota: \overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$ .

DÉFINITION 2.9. — *Soient  $w$  un entier et  $\mathcal{F}$  un faisceau constructible sur  $X$ .*

(a) *On dit que  $\mathcal{F}$  est  $\iota$ -pur de poids  $w$  si, pour toute extension finie  $E$  de  $k$  et pour tout point  $x \in X(E)$ , les valeurs propres de  $\mathrm{Frob}_{E,x}$  agissant sur la fibre  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ , où  $\bar{x}$  est un point géométrique quelconque au-dessus de  $x$ , ont valeur absolue  $|E|^{w/2}$  quand on les regarde dans  $\mathbf{C}$  à travers le plongement  $\iota$ .*

(b) *On dit que  $\mathcal{F}$  est  $\iota$ -mixte s'il admet une filtration finie croissante par des sous-faisceaux constructibles  $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  telle que les gradués  $\mathrm{gr}_i = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1}$  soient  $\iota$ -purs de poids  $i$ . Si les poids des  $\mathrm{gr}_i$  sont majorés (resp. minorés) par  $w$ , on dira que  $\mathcal{F}$  est  $\iota$ -mixte de poids  $\leq w$  (resp.  $\geq w$ ).*

Le poids d'un faisceau dépend a priori fortement du plongement  $\iota$  ; on dira que  $\mathcal{F}$  est *pur de poids  $w$*  s'il est  $\iota$ -pur de poids  $w$  pour tout  $\iota: \overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$ . Pour des questions concernant les faisceaux purs, quitte à les demi-tordre à la Tate, on pourra toujours supposer que le poids est zéro. Le théorème principal de Weil II relie le poids d'un faisceau constructible au sens de la définition ci-dessus aux valeurs propres de Frobenius agissant sur sa cohomologie et sa cohomologie à support compact.



THÉORÈME 2.10 (Deligne, [6]). — Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau constructible sur  $X$ . Si  $\mathcal{F}$  est  $\iota$ -mixte de poids  $\leq w$ , alors chaque  $H^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$  est  $\iota$ -mixte de poids  $\geq w + i$  et chaque  $H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$  est  $\iota$ -mixte de poids  $\leq w + i$ . En particulier, si la flèche d'oubli des supports est un isomorphisme,  $H^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) \cong H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$  est  $\iota$ -pur de poids  $w + i$ .

On renvoie aux travaux de Laumon [21] et de Katz [15] pour des simplifications de la preuve originale, basées sur une incarnation faisceautique de la transformation de Fourier. Voici un exemple frappant d'application de ces résultats qui reviendra dans la preuve du théorème d'équirépartition de Deligne :

Exemple 2.11 (Inégalités de Lang–Weil). — En prenant pour  $\mathcal{F}$  le faisceau constant  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ , on trouve que le nombre de points  $E$ -rationnels de  $X$  est donné par

$$|X(E)| = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr}(F_E | H_c^i(X_{\bar{k}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)).$$

Comme  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  est pur de poids zéro,  $H_c^i(X_{\bar{k}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est mixte de poids  $\leq i$  d'après le théorème 2.10, ce qui signifie que les valeurs propres de  $F_E$  agissant sur cet espace ont toutes valeur absolue au plus  $|E|^{i/2}$  quel que soit le plongement de  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  dans  $\mathbf{C}$ . Posons

$$b_c^i(X) = \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell} H_c^i(X_{\bar{k}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell), \quad A(X) = \sum_{i=0}^{2d-1} b_c^i(X).$$

On a vu que  $H_c^{2d}(X_{\bar{k}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est le  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension un sur lequel  $F_E$  agit par multiplication par  $|E|^d$ , d'où les inégalités

$$(4) \quad \left| |X(E)| - |E|^d \right| \leq \sum_{i=0}^{2d-1} b_c^i(X) |E|^{i/2} \leq A(X) |E|^{(2d-1)/2}.$$

En particulier, la variété  $X$  a un point  $E$ -rationnel dès que  $|E|^{1/2} > A(X)$ .

## 2.4. Un peu de ramification

Dans ce qui suit, on rappelle une formule due à Grothendieck–Ogg–Shafarevich qui exprime la caractéristique d'Euler d'un faisceau constructible sur une courbe en termes de sa ramification à l'infini. Plus tard, on introduira une catégorie tannakienne dont les objets irréductibles sont, au décalage près, des faisceaux constructibles sur  $\mathbb{G}_m$  et leur dimension, au sens tannakien, est donnée par la caractéristique d'Euler. La formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich nous permettra de décider à l'intérieur de quel  $\operatorname{GL}(n)$  il faut chercher le groupe associé à un objet de cette catégorie.

Soit  $C$  une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . Pour chaque point fermé  $x$  de  $C$  et chaque point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$ , nous avons d'après le paragraphe 2.1 une suite exacte

$$1 \longrightarrow I_{\bar{x}} \longrightarrow D_{\bar{x}} \longrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1.$$

Le groupe d'inertie  $I_{\bar{x}}$  contient un unique  $p$ -sous-groupe de Sylow  $P_{\bar{x}}$ , sa partie *sauvage*, et le quotient  $I_{\bar{x}}^{\text{mod}} = I_{\bar{x}}/P_{\bar{x}}$  (l'inertie *modérée*) est canoniquement isomorphe à

$$\widehat{\mathbf{Z}}'(1) = \varprojlim_{(N,p)=1} \mu_N(\bar{k}) = \varprojlim_{E/k \text{ finie}} E^\times.$$

Il s'agit du premier cran d'une filtration décroissante  $(I_{\bar{x}}^{(r)})_{r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}}$  par des sous-groupes fermés distingués de  $I_{\bar{x}}$  que l'on appelle la *filtration de ramification en numérotation supérieure* [28, Ch. IV] : on a  $I_{\bar{x}}^{(0)} = I_{\bar{x}}$ , la partie sauvage  $P_{\bar{x}}$  est l'adhérence de  $\bigcup_{r>0} I_{\bar{x}}^{(r)}$  dans  $I_{\bar{x}}$  et  $I_{\bar{x}}^{(r)} = \bigcap_{0 < s < r} I_{\bar{x}}^{(s)}$  pour tout  $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ .

Soit  $I_{\bar{x}} \rightarrow \text{GL}(W)$  une représentation continue dans un espace vectoriel  $W$  de dimension finie sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ . On dit que  $W$  est *modérée* si  $P_{\bar{x}}$  agit trivialement, et *totalelement sauvage* si  $W^{P_{\bar{x}}} = 0$ . La représentation  $W$  admet une décomposition unique

$$(5) \quad W = \bigoplus_{r \geq 0} W(r),$$

indexée par des nombres rationnels, en des sous-espaces vectoriels  $W(r) \subseteq W$  stables sous l'action de  $P_{\bar{x}}$  et vérifiant les propriétés suivantes :

$$W(0) = W^{P_{\bar{x}}}, \quad W(r)^{I_{\bar{x}}^{(r)}} = 0 \text{ si } r > 0, \quad W(r)^{I_{\bar{x}}^{(r')}} = W(r) \text{ si } r' > r.$$

Cette décomposition ne comporte qu'un nombre fini de valeurs de  $r$  pour lesquelles  $W(r)$  n'est pas nul, que l'on appellera les *sauts*. De plus,  $r \dim W(r)$  est un entier positif. On définit le *conducteur de Swan* de la représentation  $W$  comme l'entier positif

$$\text{Sw}(W) = \sum_{r \geq 0} r \dim W(r).$$

Soient  $V$  un ouvert non vide de  $C$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau lisse sur  $V$ , vu comme une représentation  $\ell$ -adique de  $\pi_1(V, \bar{\eta})$ . Par restriction, on en déduit une représentation du groupe d'inertie  $I_{\bar{x}}$  pour tout point fermé  $x \in C \setminus V$ . On notera  $\text{Sw}_{\bar{x}}(\mathcal{F})$  son conducteur de Swan. Il s'agit d'un entier positif qui est nul si et seulement si la représentation de  $I_{\bar{x}}$  est modérée, auquel cas on dira que  $\mathcal{F}$  a *ramification modérée* en  $x$ . Si  $V = \mathbb{G}_{m,k}$ , les systèmes locaux modérément ramifiés à l'infini sont les représentations du groupe fondamental modéré  $\pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{G}_{m,k})$ , qui s'insère dans une suite exacte

$$1 \longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}}'(1) \longrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{G}_{m,k}) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1.$$

Supposons maintenant que  $U \subseteq C$  est un ouvert contenant  $V$  et que l'on se donne un faisceau constructible  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . Pour tout point fermé  $u \in U \setminus V$ , on définit un entier

$$\text{dr}_{\bar{u}}(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) - \dim(\mathcal{F}_{\bar{u}}).$$

Si  $\mathcal{F}$  n'a pas de sections globales ponctuelles non nulles, alors toutes les flèches de spécialisation  $\mathcal{F}_{\bar{u}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{I_{\bar{u}}}$  sont injectives. Dans ce cas,  $\text{dr}_{\bar{u}}(\mathcal{F})$  est positif et le faisceau  $\mathcal{F}$  est lisse en  $\bar{u}$  si et seulement si  $\text{dr}_{\bar{u}}(\mathcal{F}) = 0$ .

La formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich, exposée dans ce séminaire par Raynaud [24], est l'énoncé que la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{F}$  s'exprime comme suit :

THÉORÈME 2.12 (Grothendieck–Ogg–Shafarevich). — Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau  $\ell$ -adique constructible sur  $U$  et  $V \subseteq U$  un ouvert non vide sur lequel  $\mathcal{F}$  est lisse. Alors

$$\chi(U_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F})\chi(U_{\bar{k}}) - \sum_{x \in (C \setminus V)(\bar{k})} \text{Sw}_{\bar{x}}(\mathcal{F}) - \sum_{u \in (U \setminus V)(\bar{k})} \text{dr}_{\bar{u}}(\mathcal{F}).$$

## 2.5. Catégorie dérivée et faisceaux pervers

Dans ce paragraphe,  $k$  désigne soit un corps fini soit la clôture algébrique d'un corps fini. Pour toute variété  $X$  sur  $k$ , Grothendieck a défini la *catégorie dérivée*  $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  des faisceaux  $\ell$ -adiques sur  $X$  et construit le formalisme des six opérations :

- Pour tout morphisme  $f: X \rightarrow Y$ , on dispose de deux foncteurs *image directe*

$$Rf_*, Rf!: D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et de deux foncteurs *image inverse*

$$f^*, f^!: D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

En particulier, prenant pour  $f$  le morphisme structurel  $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(k)$ , on obtient pour tout objet  $M$  dans  $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  des complexes de  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels  $R\pi_*M$  et  $R\pi_!M$  que l'on notera  $R\Gamma(X, M)$  et  $R\Gamma_c(X, M)$ . Si  $M = \mathcal{F}[0]$  pour un faisceau constructible  $\mathcal{F}$ , la cohomologie en degré  $i$  de ces complexes s'identifie à la cohomologie  $H^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$  et la cohomologie à support compact  $H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ .

- On dispose d'un bifoncteur *produit tensoriel*

$$- \otimes -: D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et d'un bifoncteur *Hom interne*

$$R\mathcal{H}om(-, -): D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^{\text{op}} \times D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

- On définit le *complexe dualisant* comme  $\omega_X = \pi^!\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  et le foncteur de *dualité de Verdier*  $\mathbb{D}: D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^{\text{op}} \rightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  comme

$$\mathbb{D}(M) = R\mathcal{H}om(M, \pi^!\overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

La dualité échange  $Rf_*$  et  $Rf^!$  pour tout morphisme  $f: X \rightarrow Y$ . Si  $X$  est lisse et purement de dimension  $d$ , le complexe dualisant est égal à  $\omega_X = \overline{\mathbf{Q}}_\ell[2d]$  et on retrouve la dualité de Poincaré  $H^i(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \cong H_c^{2d-i}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^*$  comme cas particulier.

Dans le cas où  $k$  est un corps fini, la notion de poids s'étend à la catégorie dérivée comme suit : un objet  $M$  dans  $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est dit  *$\iota$ -mixte de poids  $\leq w$*  si tous ses faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^i(M)$  sont  *$\iota$ -mixtes de poids  $\leq w+i$*  au sens de la définition 2.9, et  *$\iota$ -mixte de poids  $\geq w$*  si son dual de Verdier  $\mathbb{D}(M)$  est  *$\iota$ -mixte de poids  $\leq -w$* . On dit enfin que  $M$  est  *$\iota$ -pur de poids  $w$*  s'il est en même temps  *$\iota$ -mixte de poids  $\leq w$*  et  *$\geq w$* . Le théorème principal de Weil II peut alors se formuler comme suit :

THÉORÈME 2.13 (Deligne). — Si  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $k$ -variétés, le foncteur  $Rf_!$  envoie les objets  $\iota$ -mixtes de poids  $\leq w$  sur des objets  $\iota$ -mixtes de poids  $\leq w$ .

En s'inspirant des travaux de Goresky et MacPherson sur l'homologie d'intersection d'un espace topologique singulier, Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber ont introduit la notion de faisceau pervers dans [2].

DÉFINITION 2.14. — Un objet  $M$  de  $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est dit semipervers si tous ses faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^i(M)$  satisfont à la condition de support

$$\dim \operatorname{supp}(\mathcal{H}^i(M)) \leq -i.$$

On appelle  $M$  pervers si tant  $M$  que  $\mathbb{D}(M)$  sont semipervers.

On sait grâce à [2] que la sous-catégorie pleine  $\mathbf{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  de  $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  formée des objets pervers est abélienne. Qui plus est, la catégorie dérivée de complexes bornés dans  $\mathbf{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est équivalente à  $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ , d'où des foncteurs de cohomologie perverse

$${}^p\mathcal{H}^0: D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathbf{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

À partir de celui-ci, on pose  ${}^p\mathcal{H}^i(M) = {}^p\mathcal{H}^0(M[i])$  pour tout entier  $i$ . On peut alors calculer la cohomologie de  $M$  à l'aide de la suite spectrale

$$E_2^{a,b} = H^a(X_{\bar{k}}, {}^p\mathcal{H}^b(M)) \implies H^{a+b}(X_{\bar{k}}, M).$$

La plupart du temps nous travaillerons avec des faisceaux pervers sur une courbe. Cette catégorie admet une description plus élémentaire.

Exemple 2.15 (Faisceaux pervers sur les courbes). — Soit  $X$  une courbe lisse et géométriquement connexe sur  $k$ . Un faisceau pervers sur  $X$  est un complexe  $M$  dans  $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  satisfaisant aux conditions suivantes : (a)  $\mathcal{H}^i(M) = 0$  pour  $i \notin \{-1, 0\}$ , (b) le faisceau constructible  $\mathcal{H}^{-1}(M)$  n'a pas de sections globales ponctuelles non nulles, (c) le faisceau constructible  $\mathcal{H}^0(M)$  est supporté dans des points. En posant  $M_{\text{pct}} = \mathcal{H}^0(M)$  et  $M_{\text{npct}} = \mathcal{H}^{-1}(M)[1]$ , on trouve une suite exacte

$$(6) \quad 0 \longrightarrow M_{\text{npct}} \longrightarrow M \longrightarrow M_{\text{pct}} \longrightarrow 0.$$

De plus, les objets simples de la catégorie  $\mathbf{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  sont d'un de ces deux types :

- *ponctuels* : de la forme  $\alpha^{\text{deg}} \otimes \delta_x$  pour un point fermé  $x$  de  $X$  et une unité  $\ell$ -adique  $\alpha$ ,
- *non ponctuels* : de la forme  $(j_*\mathcal{L})[1]$  où  $j: U \hookrightarrow X$  est l'inclusion d'un ouvert non vide et  $\mathcal{L}$  un faisceau  $\ell$ -adique simple sur  $U$ . On les appelle *extensions intermédiaires*.

### 3. LE THÉORÈME D'ÉQUIRÉPARTITION DE DELIGNE

Dans ce numéro, on expose le théorème d'équirépartition de Deligne suivant les variantes qu'en ont données Katz [13, Ch. 3] et Katz–Sarnak [17, §9.2]. Sous des hypothèses assez faibles, il affirme que le groupe de monodromie d'un système local  $\ell$ -adique gouverne la variation de ses traces de Frobenius. Ces groupes sont en général difficiles à calculer, mais Katz a réussi à les déterminer complètement pour les faisceaux associés aux sommes de Kloosterman. Combiné avec le résultat de Deligne, ceci permet d'obtenir le théorème 1.3 dans l'introduction, ainsi que de l'étendre à un énoncé d'équirépartition des « angles » des sommes  $\text{Kl}_n(a, q)$  en plusieurs variables.

#### 3.1. Préliminaires sur les représentations

Dans le cadre du théorème d'équirépartition de Deligne, les groupes de monodromie sont des groupes algébriques réductifs  $G$  sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  et on définit des classes de conjugaison dans des sous-groupes compacts maximaux  $K$  de leurs points complexes. En appliquant le critère d'équirépartition de Weyl, on aura besoin de relier les représentations continues de  $K$  à des systèmes locaux  $\ell$ -adiques, vus comme des  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations algébriques de  $G$ . Ceci est possible grâce au résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit  $G$  un groupe réductif (pas nécessairement connexe) sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ . Pour chaque choix d'un plongement  $\iota: \overline{\mathbf{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$  et d'un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G(\mathbf{C})$ , les foncteurs extension des scalaires, évaluation dans les points complexes et restriction à  $K$  induisent des bijections entre les classes d'isomorphisme de*

- (a)  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations du  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -groupe algébrique  $G$ ,
- (b)  $\mathbf{C}$ -représentations du  $\mathbf{C}$ -groupe algébrique  $G_{\mathbf{C}}$ ,
- (c) représentations holomorphes du groupe de Lie complexe  $G(\mathbf{C})$ ,
- (d) représentations continues du groupe compact  $K$ ,

toutes les représentations étant supposées de dimension finie.

*Démonstration.* — Les catégories (b), (c) et (d) sont en fait équivalentes. Pour démontrer l'équivalence entre (b) et (c), on se ramène facilement au cas où  $G$  est connexe, qui est traité dans [3, Proposition D.2.1]. L'équivalence entre (c) et (d), sans des hypothèses de connexité, est le contenu de la proposition D.3.2 et de l'exemple D.3.3 dans *loc.cit.* Quant à (a), on a tautologiquement une équivalence de catégories si le plongement  $\iota$  est un isomorphisme de corps. En général, étant donnée une représentation complexe  $\rho': G_{\mathbf{C}} \rightarrow \text{GL}(V')$ , il existe un espace vectoriel  $V$  sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  et une représentation  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ , unique à isomorphisme près, telle que  $\rho' \simeq \rho_{\mathbf{C}}$ . C'est pourquoi on a énoncé le résultat en termes de bijections parmi les classes d'isomorphisme.  $\square$

### 3.2. Le théorème d'équirépartition de Deligne

Soient  $k$  un corps fini à  $q$  éléments,  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$  et  $X$  une variété lisse et géométriquement connexe sur  $k$ . On notera  $X_{\bar{k}}$  la variété sur  $k$  déduite par extension des scalaires. Fixons un nombre premier  $\ell$  distinct de la caractéristique de  $k$ , une clôture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$  de  $\mathbf{Q}_{\ell}$  et un plongement  $\iota: \overline{\mathbf{Q}}_{\ell} \hookrightarrow \mathbf{C}$ . Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau  $\ell$ -adique lisse de rang  $r$  sur  $X$ , correspondant à une représentation continue

$$\rho: \pi_1(X, \bar{\eta}) \rightarrow \mathrm{GL}(r, \overline{\mathbf{Q}}_{\ell}).$$

DÉFINITION 3.2. — *Les groupes de monodromie arithmétique  $G_{\mathrm{arith}, \mathcal{L}}$  et géométrique  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}$  de  $\mathcal{L}$  sont les groupes algébriques sur  $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$  obtenus comme l'adhérence de Zariski de  $\rho(\pi_1(X, \bar{\eta}))$  et de  $\rho(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\eta}))$  dans  $\mathrm{GL}(r, \overline{\mathbf{Q}}_{\ell})$ . En particulier,  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}} \subseteq G_{\mathrm{arith}, \mathcal{L}}$ .*

Dans Weil II, Deligne montre que, si  $\mathcal{L}$  est  $\iota$ -pur d'un certain poids, la représentation de  $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\eta})$  associée est complètement réductible [6, Thm. 3.4.1 (iii)] et le groupe de monodromie géométrique  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}$  est donc réductif. Qui plus est :

THÉORÈME 3.3 (Deligne). — *Si  $\mathcal{L}$  est  $\iota$ -pur, la composante neutre du groupe de monodromie géométrique  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}$  est semisimple.*

Supposons que  $\mathcal{L}$  est  $\iota$ -pur de poids zéro et que l'on a l'égalité  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}} = G_{\mathrm{arith}, \mathcal{L}}$ , de sorte que  $\rho$  se factorise par  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}(\overline{\mathbf{Q}}_{\ell})$ . Choisissons un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}(\mathbf{C})$ . Le but est d'associer à chaque point de  $X$  une classe de conjugaison dans  $K$  dont la trace soit égale à  $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{E,x} | \mathcal{L})$ . Soient  $x$  un point fermé de  $X$  à valeurs dans  $E$  et  $\mathrm{Frob}_{E,x}$  la classe de conjugaison qu'il définit dans  $\pi_1(X, \bar{\eta})$ . Son image par la représentation  $\rho$  est une classe de conjugaison

$$\rho(\mathrm{Frob}_{E,x}) \in G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}(\overline{\mathbf{Q}}_{\ell})^{\#} \subset G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}(\mathbf{C})^{\#}.$$

Soit  $\rho(\mathrm{Frob}_{E,x})^{\mathrm{ss}}$  sa semisimplification au sens de la décomposition de Jordan. Puisque  $\mathcal{L}$  est  $\iota$ -pur de poids zéro, chaque élément  $g$  dans  $\rho(\mathrm{Frob}_{E,x})^{\mathrm{ss}}$  est semisimple avec des valeurs propres *unitaires* et l'adhérence de  $\langle g \rangle$  est donc un sous-groupe compact de  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}(\mathbf{C})$ . Comme tous les compacts maximaux sont conjugués, il s'ensuit qu'il existe des éléments  $h$  dans  $K$  et  $s$  dans  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}(\mathbf{C})$  tels que  $g = s^{-1}hs$ . On affirme que  $h$  est bien défini à conjugaison près par un élément de  $K$ . Par le théorème de Peter–Weyl, les traces des représentations irréductibles de dimension finie  $\Lambda_K$  de  $K$  séparent les classes de conjugaison. Or  $\Lambda_K$  correspond d'après le théorème 3.1 à une unique représentation  $\Lambda$  du  $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$ -groupe  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}$  et, quel que soit le choix de  $h$ , on a

$$\mathrm{Tr}(\Lambda_K(h)) = \mathrm{Tr}(\Lambda(\rho(\mathrm{Frob}_{E,x})^{\mathrm{ss}})) = \mathrm{Tr}(\Lambda(\rho(\mathrm{Frob}_{E,x}))).$$

On notera  $\theta_{E,x}$  la classe de conjugaison dans  $K$  ainsi obtenue.

Finalement, soit  $\pi: K \rightarrow K^{\#}$  la projection canonique. Muni de la topologie quotient, l'espace  $K^{\#}$  est compact et l'application  $f \mapsto f_{\mathrm{cent}} = f \circ \pi$  permet d'identifier  $\mathcal{C}(K^{\#})$

aux fonctions *centrales* continues sur  $K$ . L'image directe par  $\pi$  de la mesure de Haar normalisée  $\mu_K$  est une mesure de probabilité  $\mu_{K^\#}$  sur  $K^\#$  telle que

$$\int_{K^\#} f \mu_{K^\#} = \int_K f_{\text{cent}} \mu_K.$$

THÉORÈME 3.4 (Deligne). — *Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau  $\ell$ -adique lisse sur  $X$ . Supposons que  $\mathcal{L}$  est  $\iota$ -pur de poids zéro et que les groupes  $G_{\text{arith}, \mathcal{L}}$  et  $G_{\text{geom}, \mathcal{L}}$  coïncident. Lorsque le degré des extensions  $E/k$  tend vers l'infini, les multi-ensembles  $\{\theta_{E,x}\}_{x \in X(E)}$  s'équirépartissent dans  $K^\#$  selon la mesure  $\mu_{K^\#}$ .*

DÉMONSTRATION — Soit  $f: K \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction centrale continue. Il faut montrer que, quand  $E$  parcourt les extensions de  $k$  de degré assez grand pour que l'ensemble  $X(E)$  soit non vide, on a l'égalité

$$(7) \quad \int_K f \mu_K = \lim_{|E| \rightarrow \infty} \frac{1}{|X(E)|} \sum_{x \in X(E)} f(\theta_{E,x}).$$

D'après le théorème de Peter-Weyl,  $f$  est limite uniforme de combinaisons linéaires finies de traces de représentations irréductibles de dimension finie  $\Lambda_K$  de  $K$ ; il suffit de traiter le cas d'une telle représentation. Comme  $\mu_K$  a masse totale un, la fonction constante  $f = 1$  vérifie (7) même sans passer à la limite. On peut donc supposer que  $\Lambda_K$  n'est pas triviale, auquel cas l'intégrale du membre gauche s'annule :

$$\int_K \text{Tr}_{\Lambda_K} \mu_K = 0.$$

Montrons que le membre droit de (7) est également nul (c'est une variante du critère d'équirépartition de Weyl). Invoquant à nouveau le théorème 3.1,  $\Lambda_K$  correspond à une unique représentation irréductible non triviale  $\Lambda$  du groupe algébrique  $G_{\text{geom}, \mathcal{L}}$  sur  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ . Compte tenu de l'hypothèse  $G_{\text{arith}, \mathcal{L}} = G_{\text{geom}, \mathcal{L}}$ , on peut composer  $\Lambda$  avec

$$\pi_1(X, \eta) \xrightarrow{\rho} G_{\text{geom}, \mathcal{L}}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et penser à  $\Lambda \circ \rho$  comme système local  $\ell$ -adique sur  $X$ . Notons-le  $\Lambda(\mathcal{L})$  et regardons ses traces de Frobenius dans  $\mathbf{C}$  via  $\iota$ . On a alors  $\text{Tr}_{\Lambda_K}(\theta_{E,x}) = \text{Tr}(\text{Frob}_{E,x} | \Lambda(\mathcal{L}))$  et la formule des traces de Grothendieck donne l'égalité

$$\sum_{x \in X(E)} \text{Tr}_{\Lambda_K}(\theta_{E,x}) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \text{Tr}(F_E | H_c^i(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mathcal{L}))).$$

Comme le groupe  $G_{\text{geom}, \mathcal{L}}$  est réductif et  $\Lambda$  en est une représentation irréductible, il existe des entiers  $a, b \geq 0$  tels que  $\Lambda(\mathcal{L})$  soit sous-quotient du système local  $\mathcal{L}^{\otimes a} \otimes (\mathcal{L}^\vee)^{\otimes b}$ . On en déduit que  $\Lambda(\mathcal{L})$  est encore  $\iota$ -pur de poids zéro. La cohomologie à support compact  $H_c^i(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mathcal{L}))$  est donc  $\iota$ -mixte de poids  $\leq i$  d'après le théorème principal de Weil II. Par ailleurs, on a l'annulation

$$H_c^{2d}(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mathcal{L})) = (\Lambda(\mathcal{L})_{\bar{\eta}})_{\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\eta})} = 0$$

car  $\Lambda(\mathcal{L})_{\bar{\eta}}$  est une représentation irréductible non triviale de  $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{\eta})$ . Combinant ces informations, il vient

$$(8) \quad \left| \sum_{x \in X(E)} \mathrm{Tr}_{\Lambda_K}(\theta_{E,x}) \right| \leq \sum_{i=0}^{2d-1} \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell} H_c^i(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mathcal{L})) \cdot |E|^{i/2} \\ \leq \left( \sum_{i=0}^{2d-1} \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell} H_c^i(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mathcal{L})) \right) |E|^{(2d-1)/2}.$$

Par les inégalités de Lang-Weil, rappelées dans (4), on a  $2|X(E)| \geq |E|^d$  pour toute extension  $E$  assez large pour que  $|E|^{1/2} > 2 \sum_{i \leq 2d-1} b_c^i(X)$  et, en particulier, l'ensemble  $X(E)$  n'est pas vide. Joint à ce qui précède, ceci fournit la majoration

$$\left| \frac{1}{|X(E)|} \sum_{x \in X(E)} \mathrm{Tr}_{\Lambda_K}(\theta_{E,x}) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{|E|}} \sum_{i=0}^{2d-1} \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell} H_c^i(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mathcal{L})).$$

La limite du membre gauche est donc zéro lorsque le degré de  $E$  tend vers l'infini.  $\square$

*Remarque 3.5.* — Dans [17, Theorem 9.2.6 (3)] Katz et Sarnak démontrent qu'il existe un entier  $C(X_{\bar{k}}, \mathcal{L})$ , ne dépendant que de  $X$  et du système local  $\mathcal{L}$ , tel que l'inégalité

$$(9) \quad \sum_{i=0}^{2d} \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell} H_c^i(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mathcal{L})) \leq \dim(\Lambda) C(X_{\bar{k}}, \mathcal{L})$$

soit vraie pour toute  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation de dimension finie  $\Lambda$  de  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}}$ . Si  $X$  est une courbe, on peut d'après [13, (3.6.2.1)] prendre

$$C(X_{\bar{k}}, \mathcal{L}) = 2g - 2 + N + \sum_{i=1}^N r_i$$

où  $g$  est le genre de sa compactification,  $N$  le nombre de  $\bar{k}$ -points  $x_1, \dots, x_N$  à l'infini, et  $r_i$  le plus grand saut dans la décomposition (5) de la monodromie locale de  $\mathcal{L}$  en  $x_i$ .

### 3.3. Retour aux sommes de Kloosterman

On donne maintenant l'application du théorème d'équirépartition de Deligne aux sommes de Kloosterman. En plus des références originales de Deligne [5] et Katz [13], le lecteur pourra consulter avec profit le survol [22] de Laumon. Soient  $\psi: \mathbf{F}_q \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  un caractère additif non trivial et  $\mathcal{L}_\psi$  le faisceau d'Artin-Schreier correspondant. Pour un entier  $n \geq 2$ , notons  $\sigma: \mathbb{G}_m^n \rightarrow \mathbb{A}^1$  et  $\pi: \mathbb{G}_m^n \rightarrow \mathbb{G}_m$  les morphismes somme et produit des coordonnées, respectivement, et posons

$$\mathcal{K}l_n = R^{n-1} \pi_! \sigma^* \mathcal{L}_\psi.$$



D'après Deligne,  $\mathcal{K}l_n$  est un faisceau  $\ell$ -adique lisse de rang  $n$  sur  $\mathbb{G}_{m, \mathbf{F}_q}$  ayant pour trace de Frobenius en un point  $a \in \mathbf{F}_q^\times$  la somme de Kloosterman au signe près :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\mathbf{F}_q, a} | \mathcal{K}l_n) = (-1)^{n-1} \mathrm{Kl}_n(a, q).$$

De plus, la flèche d'oubli des supports  $R^{n-1}\pi_!\sigma^*\mathcal{L}_\psi \rightarrow R^{n-1}\pi_*\sigma^*\mathcal{L}_\psi$  est un isomorphisme. Comme  $\sigma^*\mathcal{L}_\psi$  est  $\iota$ -pur de poids zéro, le théorème principal de Weil II entraîne que  $\mathcal{K}l_n$  est  $\iota$ -pur de poids  $n-1$ , d'où la majoration qui nous avait permis de démontrer l'équirépartition des angles des sommes de Gauss dans l'introduction :

$$|\mathrm{Kl}_n(a, q)| \leq nq^{\frac{n-1}{2}}.$$

Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{K}l_n(\frac{n-1}{2})$  le système local  $\ell$ -adique  $\iota$ -pur de poids zéro obtenu en demi-tordant  $\mathcal{K}l_n$  à la Tate. On sait que le déterminant  $\det \mathcal{L} = \wedge^n \mathcal{L}$  est le système local trivial de rang un sur  $\mathbb{G}_{m, \mathbf{F}_q}$  et que, pour  $n$  pair ou  $p = 2$  et  $n$  impair, on dispose d'un accouplement parfait  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell$  qui est alterné dans le premier cas et symétrique dans le second. Il s'ensuit que le groupe de monodromie arithmétique  $G_{\mathrm{arith}, \mathcal{L}}$  est inclus dans  $\mathrm{SL}(n)$ . Si  $n$  est pair, c'est un sous-groupe du groupe symplectique  $\mathrm{Sp}(n)$  et, si  $p = 2$  et  $n$  est impair, du groupe spécial orthogonal  $\mathrm{SO}(n)$ . Dans [13, 11.1], Katz démontre que la monodromie est aussi large que possible en calculant

$$G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}} = \begin{cases} \mathrm{Sp}(n) & n \text{ pair,} \\ \mathrm{SL}(n) & n \text{ impair et } p \neq 2, \\ \mathrm{SO}(n) & n \text{ impair } \neq 7 \text{ et } p = 2, \\ G_2 & n = 7 \text{ et } p = 2, \end{cases}$$

où  $G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$  est l'un des groupes algébriques exceptionnels, défini comme le stabilisateur d'une certaine forme trilinéaire dans la représentation standard de dimension 7 de  $\mathrm{SO}(7)$ . Avec un petit argument additionnel pour traiter le dernier cas [13, 11.3], on en déduit l'égalité des groupes  $G_{\mathrm{geom}, \mathcal{L}} = G_{\mathrm{arith}, \mathcal{L}}$ .

Supposons  $p \neq 2$  et notons  $G$  le groupe de monodromie de  $\mathcal{L}$ , qui est donc égal à  $\mathrm{Sp}(n)$  si  $n$  est pair et à  $\mathrm{SL}(n)$  si  $n$  est impair. L'intersection  $K = G(\mathbf{C}) \cap U(n)$  est un sous-groupe compact maximal de  $G(\mathbf{C})$ . Pour le système local  $\mathcal{K}l_n$ , le nombre  $C(\mathbb{G}_{m, \mathbf{F}_q}, \mathcal{K}l_n)$  de la remarque 3.5 vaut  $1/n$ , de sorte que (8) et (9) donnent

$$\left| \frac{1}{q-1} \sum_{a \in \mathbf{F}_q^\times} \mathrm{Tr}_{\Lambda_K}(\theta_{\mathbf{F}_q, a}) \right| \leq \frac{\dim(\Lambda_K)}{n} \frac{\sqrt{q}}{q-1}$$

pour toute représentation continue irréductible non triviale  $\Lambda_K$  de  $K$ . Le résultat suivant, qui généralise le théorème 1.3 dans l'introduction, en découle :

**THÉORÈME 3.6 (Katz).** — *Lorsque  $q$  tend vers l'infini parmi n'importe quelle suite de puissances de nombres premiers impairs, les multi-ensembles*

$$\{(-1)^{n-1} q^{\frac{1-n}{2}} \mathrm{Kl}_n(a, q) \mid a \in \mathbf{F}_q^\times\}$$

se répartissent comme les traces de matrices aléatoires dans  $K$ .

#### 4. LE THÉORÈME D'ÉQUIRÉPARTITION DE KATZ

Ce numéro est consacré au résultat principal de la monographie [16]. Après un court rappel du formalisme, on introduit une catégorie tannakienne de faisceaux pervers sur le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$  suivant Gabber et Loeser [8]. Ceci permet de leur associer des groupes algébriques sur  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  qui joueront le rôle des groupes de monodromie. Sous les bonnes hypothèses, il s'agit de groupes réductifs et on peut définir, comme auparavant, des classes de conjugaison  $\theta_{E,\chi}$  dans un sous-groupe compact maximal  $K$  de leurs points complexes. Le théorème de Katz affirme que les  $\theta_{E,\chi}$  s'équirépartissent selon la mesure induite par la mesure de Haar normalisée sur  $K$ . Après l'avoir démontré, on donnera des exemples de calcul du groupe tannakien. En particulier, il est égal à  $\mathrm{SL}(2)$  pour les objets correspondant aux sommes d'Evans et Rudnick dans l'introduction.

##### 4.1. Bons caractères

Dans ce paragraphe et le suivant, on se place sur un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , que l'on omettra dans la notation. Soit  $j: \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{P}^1$  l'inclusion.

DÉFINITION 4.1. — Soient  $M$  un faisceau pervers sur  $\mathbb{G}_m$  et  $\mathcal{L}_\chi$  le faisceau de Kummer associé à un caractère continu  $\chi$  de  $\pi_1^{\mathrm{mod}}(\mathbb{G}_m)$ . On dit que  $\chi$  est bon pour  $M$  si la flèche canonique d'oubli des supports

$$Rj_!(M \otimes \mathcal{L}_\chi) \longrightarrow Rj_*(M \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

est un isomorphisme dans  $D_c^b(\mathbb{P}^1, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ . Autrement, on dira que  $\chi$  est mauvais pour  $N$ .

LEMME 4.2. — Pour un objet donné  $M$ , il y a au plus  $2\mathrm{rg}(M)$  mauvais caractères, où  $\mathrm{rg}(M)$  désigne le rang générique du faisceau constructible  $\mathcal{H}^{-1}(M)$ .

DÉMONSTRATION — Si  $M$  est ponctuel, tous les caractères sont bons. En dévissant  $M$  dans sa partie ponctuelle et non ponctuelle comme dans (6), on peut donc supposer que  $M$  est de la forme  $\mathcal{F}[1]$  pour un faisceau constructible  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{G}_m$  qui n'a pas de sections ponctuelles. Comme le foncteur  $j_!$  est exact, un caractère  $\chi$  est bon pour  $\mathcal{F}$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$j_!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\chi) \cong j_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\chi), \quad R^1j_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\chi) = 0.$$

Compte tenu de la description des foncteurs  $j_!$  et  $j_*$  dans le paragraphe 2.3, le premier isomorphisme équivaut à dire que  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\chi$ , en tant que représentation des groupes d'inertie  $I_0$  et  $I_\infty$ , n'a pas d'invariants. Par ailleurs, le faisceau  $R^1j_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\chi)$  est supporté sur  $\{0, \infty\}$  et les fibres en ces points sont les coinvariants sous les groupes d'inertie. Il suffit donc d'éviter les caractères modérés  $\chi$  apparaissant dans la monodromie locale de  $\mathcal{F}$  autour de 0, ainsi que leurs inverses, et il y en a au plus  $2\mathrm{rg}(M)$ .  $\square$

## 4.2. Une catégorie tannakienne de faisceaux pervers sur $\mathbb{G}_m$ (d’après Gabber et Loeser)

Soit  $m: \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  la loi de multiplication. La catégorie dérivée  $D_c^b(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est munie de deux *produits de convolution*

$$M \star_! N = Rm_!(M \boxtimes N), \quad M \star N = Rm_*(M \boxtimes N),$$

qui sont échangés par la dualité, *e.g.*  $\mathbb{D}(M \star_! N) = \mathbb{D}(M) \star \mathbb{D}(N)$ . En combinant la suite spectrale de Leray pour le morphisme  $m$ , l’identité  $m^* \mathcal{L}_\chi = \mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_\chi$  et la formule de Künneth, on obtient des isomorphismes

$$\begin{aligned} R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, (M \star_! N) \otimes \mathcal{L}_\chi) &= R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, M \otimes \mathcal{L}_\chi) \otimes R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, N \otimes \mathcal{L}_\chi), \\ R\Gamma(\mathbb{G}_m, (M \star N) \otimes \mathcal{L}_\chi) &= R\Gamma(\mathbb{G}_m, M \otimes \mathcal{L}_\chi) \otimes R\Gamma(\mathbb{G}_m, N \otimes \mathcal{L}_\chi). \end{aligned}$$

En général, aucun des produits de convolution ne préserve les objets pervers. Par exemple, le carré de convolution d’un objet de Kummer  $\mathcal{L}_\chi[1]$  est égal à  $\mathcal{L}_\chi[2]$  qui n’est pas pervers ; dans un sens que l’on précisera ci-dessous, ceci est la seule obstruction. Si  $M$  et  $N$  sont pervers, il en va de même pour  $M \boxtimes N$  et, le morphisme  $m$  étant affine, l’objet  $M \star N$  est semipervers. Comme  $\mathbb{D}(M \star_! N) = \mathbb{D}(M) \star \mathbb{D}(N)$  est également semipervers, si la flèche d’oubli des supports  $M \star_! N \rightarrow M \star N$  est un isomorphisme, le produit de convolution de  $M$  et  $N$  est pervers. Nous allons introduire une localisation de la catégorie  $\mathbf{Perv}(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  sur laquelle cette flèche devient toujours un isomorphisme.

LEMME 4.3. — *Soit  $M$  un faisceau pervers sur  $\mathbb{G}_m$ .*

- (a) *On a  $\chi(\mathbb{G}_m, M) \geq 0$ .*
- (b) *Si  $\chi(\mathbb{G}_m, M) = 0$ , alors  $M$  est de la forme  $\mathcal{F}[1]$  pour un faisceau lisse  $\mathcal{F}$  qui est extension successive de faisceaux de Kummer  $\mathcal{L}_\chi$ .*

DÉMONSTRATION — La caractéristique d’Euler étant additive par rapport aux suites exactes, le dévissage (6) de  $M$  en sa partie ponctuelle et non ponctuelle donne

$$\chi(\mathbb{G}_m, M) = \chi(\mathbb{G}_m, M_{\text{pct}}) + \chi(\mathbb{G}_m, M_{\text{npct}}).$$

Le premier terme est la dimension de  $H^0(\mathbb{G}_m, M_{\text{pct}})$ , donc positif. Puisque  $M_{\text{npct}} = \mathcal{F}[1]$  pour un faisceau constructible  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{G}_m$  et que la caractéristique d’Euler de  $\mathbb{G}_m$  est nulle, la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich est dans ce cas l’égalité

$$(10) \quad \chi(\mathbb{G}_m, M_{\text{npct}}) = \text{Sw}_0(\mathcal{F}) + \text{Sw}_\infty(\mathcal{F}) + \sum_{x \in \mathbb{G}_m(\bar{k})} [\text{dr}_x(\mathcal{F}) + \text{Sw}_x(\mathcal{F})]$$

dont tous les termes sont positifs car  $\mathcal{F}$  n’a pas de sections ponctuelles.

Supposons maintenant  $\chi(\mathbb{G}_m, M) = 0$ . On a alors  $H^0(\mathbb{G}_m, M_{\text{pct}}) = 0$ , d’où  $M_{\text{pct}} = 0$  vu qu’un faisceau ponctuel sans sections globales est nul. Par suite,  $M = \mathcal{F}[1]$  et tous les termes du membre droit de (10) s’annulent. Puisque  $\mathcal{F}$  n’a pas de sections ponctuelles et que  $\text{dr}_x(\mathcal{F}) = 0$  pour tout  $x$ , il s’agit d’un faisceau lisse sur  $\mathbb{G}_m$ . Comme  $\text{Sw}_0(\mathcal{F})$  et  $\text{Sw}_\infty(\mathcal{F})$  sont nuls,  $\mathcal{F}$  a ramification modérée à l’infini et correspond donc à une

représentation continue de  $\pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{G}_m)$ . Or ce groupe est abélien, comme on l’a vu dans le paragraphe 2.4, et ses caractères sont précisément les faisceaux de Kummer  $\mathcal{L}_\chi$ .  $\square$

On dira qu’un faisceau pervers est *négligeable* si sa caractéristique d’Euler est nulle. Soit  $\mathbf{Nég}(\mathbb{G}_m)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Perv}(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  formée des objets négligeables. Par le lemme 4.3, elle est *épaisse* : dans une suite exacte  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ , l’objet  $B$  est négligeable si et seulement si tant  $A$  que  $C$  sont négligeables. On peut alors, avec Gabber et Loeser [8], réaliser la construction suivante : soit  $\overline{\mathbf{Nég}}$  la sous-catégorie pleine de  $D_c^b(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  formée des objets  $M$  dont les faisceaux pervers de cohomologie  ${}^p\mathcal{H}^i(M)$  sont négligeables. Alors  $\overline{\mathbf{Nég}}$  est une sous-catégorie épaisse et la localisation

$$(11) \quad \mathbf{Perv}(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) / \mathbf{Nég}(\mathbb{G}_m)$$

est équivalente à une sous-catégorie abélienne de la localisation de  $D_c^b(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  relativement à  $\overline{\mathbf{Nég}}$ , en fait le cœur d’une  $t$ -structure [8, §3.6].

PROPOSITION 4.4. — *Soient  $M$  et  $N$  deux faisceaux pervers sur  $\mathbb{G}_m$ . La flèche naturelle  $M \star_! N \rightarrow M \star N$  dans  $D^b(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  est un isomorphisme modulo  $\overline{\mathbf{Nég}}$ .*

DÉMONSTRATION — Grâce au lemme 4.2, il existe un caractère modéré  $\chi$  tel que les complexes  $R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, \cdot)$  et  $R\Gamma(\mathbb{G}_m, \cdot)$  soient isomorphes pour les trois objets  $M \otimes \mathcal{L}_\chi$ ,  $N \otimes \mathcal{L}_\chi$  et  $(M \star_! N) \otimes \mathcal{L}_\chi$ . En particulier, la flèche naturelle

$$R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, M \otimes \mathcal{L}_\chi) \otimes R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, N \otimes \mathcal{L}_\chi) \rightarrow R\Gamma(\mathbb{G}_m, M \otimes \mathcal{L}_\chi) \otimes R\Gamma(\mathbb{G}_m, N \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

est un isomorphisme. Or cette flèche s’identifie à

$$R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, (M \star_! N) \otimes \mathcal{L}_\chi) \longrightarrow R\Gamma(\mathbb{G}_m, (M \star N) \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

et, comme la source est isomorphe à  $R\Gamma(\mathbb{G}_m, (M \star_! N) \otimes \mathcal{L}_\chi)$  par le choix de  $\chi$ , on en déduit que l’oubli des supports induit un isomorphisme

$$R\Gamma(\mathbb{G}_m, (M \star_! N) \otimes \mathcal{L}_\chi) \longrightarrow R\Gamma(\mathbb{G}_m, (M \star N) \otimes \mathcal{L}_\chi).$$

Soit  $C$  le cône du morphisme  $M \star_! N \rightarrow M \star N$ . Quitte à remplacer  $C$  par  $C \otimes \mathcal{L}_\chi$ , ce qui précède implique l’annulation  $R\Gamma(\mathbb{G}_m, C) = 0$ . Dans la suite spectrale

$$E_2^{a,b} = H^a(\mathbb{G}_m, {}^p\mathcal{H}^b(C)) \implies H^{a+b}(\mathbb{G}_m, C \otimes \mathcal{L}_\chi),$$

les termes  $E_2^{a,b}$  avec  $a \neq 0, 1$  s’annulent car  $\mathbb{G}_m$  est une courbe affine. Elle dégénère donc en  $E_2$ , et la condition  $R\Gamma(\mathbb{G}_m, C) = 0$  équivaut à  $R\Gamma(\mathbb{G}_m, {}^p\mathcal{H}^b(C)) = 0$  pour tout  $b$ . Par conséquent, les faisceaux pervers  ${}^p\mathcal{H}^b(C)$  sont négligeables et  $M \star_! N \rightarrow M \star N$  est un isomorphisme modulo  $\overline{\mathbf{Nég}}$ .  $\square$

Il sera utile de disposer de représentants explicites des classes d’équivalence dans (11). Katz considère la sous-catégorie  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$  de  $\mathbf{Perv}(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  formée des faisceaux pervers n’ayant pas de sous-objets ni de sous-quotients du type Kummer décalé  $\mathcal{L}_\chi[1]$ . Dans [14, §2.6], il démontre que, pour un tel  $M$ , les objets  $M \star_! N$  et  $M \star N$  sont pervers

quel que soit le faisceau pervers  $N$  sur  $\mathbb{G}_m$ . On peut alors parler de l’image de la flèche d’oubli des supports et définir la *convolution intermédiaire*

$$M \star_{\text{int}} N = \text{im}(M \star_! N \longrightarrow M \star N).$$

En composant l’inclusion de  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$  dans  $\mathbf{Perv}(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  avec le passage à la localisation on obtient, d’après [8, §3.7], une équivalence de catégories

$$\mathbf{P}(\mathbb{G}_m) \cong \mathbf{Perv}(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) / \mathbf{Nég}(\mathbb{G}_m)$$

qui envoie la convolution intermédiaire  $\star_{\text{int}}$  sur le produit de convolution. En particulier, chaque classe d’équivalence dans la localisation a un unique représentant dans  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$ .

THÉORÈME 4.5 (Gabber–Loeser, Katz, Deligne)

- (a) Munie du produit de convolution intermédiaire  $\star_{\text{int}}$ , de l’objet neutre  $\delta_1$  et de la dualité  $M^\vee = [x \mapsto x^{-1}]^* \mathbb{D}(M)$ , la catégorie  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$  est tannakienne.
- (b) Notons  $j_0: \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}_m^1$  l’inclusion. Pour n’importe quel faisceau de Kummer  $\mathcal{L}_\chi$  sur  $\mathbb{G}_m$ , la correspondance

$$M \mapsto H^0(\mathbb{A}^1, j_{0!}(M \otimes \mathcal{L}_\chi))$$

définit un foncteur fibre  $\omega_\chi$  sur la catégorie tannakienne  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$ .

La première assertion est le théorème 3.7.5 de Gabber–Loeser [8] et la deuxième, que Katz attribue à Deligne, est démontrée dans l’appendice à [16].

*Remarque 4.6.* — Si  $M$  est un faisceau pervers sur  $\mathbb{G}_m$ , les groupes  $H^i(\mathbb{A}^1, j_{0!}M)$  s’annulent en degré  $i \neq 0$  et  $\dim H^0(\mathbb{A}^1, j_{0!}M) = \chi(\mathbb{G}_m, M)$ . La dimension tannakienne d’un objet  $M$  de  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$  est donc égale à sa caractéristique d’Euler  $\chi(\mathbb{G}_m, M)$ .

### 4.3. Les classes de conjugaison $\theta_{E,\chi}$

Plaçons-nous maintenant sur un corps fini  $k$ . Soit  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Perv}(\mathbb{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$  formée des objets  $M$  tels que le faisceau pervers  $M_{\bar{k}}$  sur  $\mathbb{G}_{m,\bar{k}}$  déduit de  $M$  par extension des scalaires appartienne à la sous-catégorie  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$  du paragraphe précédent. La convolution intermédiaire et le foncteur fibre

$$M \mapsto \omega(M) = H^0(\mathbb{A}_{\bar{k}}^1, j_{0!}M)$$

munissent  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$  d’une structure de catégorie tannakienne.

LEMME 4.7. — *La sous-catégorie pleine de  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$  formée des faisceaux pervers  $\iota$ -purs de poids zéro est stable par le produit de convolution intermédiaire.*

DÉMONSTRATION — Si  $M$  et  $N$  sont des faisceaux pervers  $\iota$ -purs de poids zéro, alors  $M \boxtimes N$  est également  $\iota$ -pur de poids zéro sur  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ . D’après le résultat principal de Weil II, comme formulé dans le théorème 2.13,  $M \star_! N = Rm_{\iota}(M \boxtimes N)$  est  $\iota$ -mixte de poids  $\leq 0$ . Puisque tout quotient d’un tel faisceau pervers est encore  $\iota$ -mixte de poids  $\leq 0$  par [2, 5.3.1], on en déduit que  $M \star_{\text{int}} N$  est  $\iota$ -mixte de poids  $\leq 0$ . Or son dual

de Verdier  $\mathbb{D}(M \star_{\text{int}} N)$  s'identifie à la convolution intermédiaire  $\mathbb{D}(M) \star_{\text{int}} \mathbb{D}(N)$  et est donc  $\iota$ -mixte de poids  $\leq 0$  aussi. Par conséquent,  $M \star_{\text{int}} N$  est  $\iota$ -pur de poids zéro.  $\square$

Soit  $M$  un faisceau pervers dans  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$ . Supposons que  $M$  est semisimple et  $\iota$ -pur de poids zéro. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.2, on voit que  $Rj_!M \rightarrow Rj_*M$  est un isomorphisme si et seulement si les applications

$$H_c^0(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, M) \longrightarrow \omega(M) \longrightarrow H^0(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, M)$$

d'oubli des supports et de restriction sont des isomorphismes. Si c'est le cas,  $\omega(M)$  est  $\iota$ -pur de poids zéro d'après le théorème principal de Weil II, c'est-à-dire que les valeurs propres de Frobenius agissant sur  $\omega(M)$  sont unitaires.

Étant donné une extension finie  $E$  de  $k$  et un caractère multiplicatif  $\chi: E^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ , notons  $\mathcal{L}_\chi$  le système local de Kummer sur  $\mathbb{G}_{m,E}$  défini dans l'exemple 2.5. Si  $L$  est une extension finie de  $E$ , le tiré en arrière de  $\mathcal{L}_\chi$  sur  $\mathbb{G}_{m,L}$  est le faisceau de Kummer associé au caractère  $\chi \circ N_{L/E}$ . Vus comme des faisceaux lisses sur  $\mathbb{G}_{m,\bar{k}}$ , les  $\mathcal{L}_\chi$  sont donc les caractères d'ordre fini du groupe fondamental modéré

$$\pi_1^{\text{mod}}(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}) = \varprojlim_{E/k \text{ finie}} E^\times,$$

où les applications de transition sont données par la norme. On dira que le caractère  $\chi$  est *bon* pour  $M$  si  $\chi$  est bon pour l'objet  $M_{\bar{k}}$  sur  $\mathbb{G}_{m,\bar{k}}$  au sens de la définition 4.1. Quitte à identifier  $(E, \chi)$  avec  $(L, \chi \circ N_{L/E})$  pour toute extension finie  $L$  de  $E$ , le lemme 4.2 entraîne qu'il y a au plus  $2\text{rg}(M)$  mauvais caractères pour  $M$ .

**PROPOSITION 4.8.** — *Soient  $M$  un faisceau pervers dans  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$  et  $\langle M \rangle^\otimes$  la sous-catégorie tannakienne qu'il engendre. Supposons que  $M$  est semisimple et  $\iota$ -pur de poids zéro. Si un caractère  $\chi: E^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  est bon pour  $M$ , alors  $\chi$  est bon pour n'importe quel objet  $N$  dans  $\langle M \rangle^\otimes$  et la correspondance*

$$N \mapsto \omega_\chi(N) = H_c^0(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, M \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

définit un foncteur fibre sur  $\langle M \rangle^\otimes$ . Le groupe  $\omega_\chi(N)$  est  $\iota$ -pur de poids zéro et le Frobenius géométrique  $F_E$  est un automorphisme tensoriel de  $\omega_\chi$ .

Fixons un foncteur fibre  $\omega$  sur la catégorie tannakienne  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$ , par exemple celui correspondant au caractère trivial de  $k^\times$ , pour lequel

$$\omega(M) = H^0(\mathbb{A}_{\bar{k}}^1, j_{0!}M).$$

Soient  $M$  un faisceau pervers dans  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$  et  $M_{\bar{k}}$  l'objet de  $\mathbf{P}(\mathbb{G}_m)$  déduit par extension des scalaires. Par le théorème principal des catégories tannakiennes, le foncteur  $\omega$  induit des équivalences

$$\langle M \rangle^\otimes \cong \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(G_{\text{arith},M}) \quad \langle M_{\bar{k}} \rangle^\otimes \cong \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(G_{\text{geom},M})$$

entre la catégorie engendrée par  $M$  (*resp.*  $M_{\bar{k}}$ ) et la catégorie des  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations de dimension finie du groupe des automorphismes tensoriels  $G_{\text{arith},M}$  (*resp.*  $G_{\text{geom},M}$ ) de

la restriction de  $\omega$  à  $\langle M \rangle^\otimes$  (*resp.* à  $\langle M_{\bar{k}} \rangle^\otimes$ ). Il s'agit dans les deux cas de sous-groupes de  $\mathrm{GL}(\omega(M))$ . Concrètement,  $G_{\mathrm{arith},M}$  est le sous-groupe des automorphismes linéaires  $\gamma$  ayant la propriété suivante : pour toute construction tensorielle  $N = \bigoplus M^{\otimes r_i} \otimes (M^\vee)^{\otimes s_i}$ , l'action de  $\gamma$  sur  $\omega(N)$  laisse globalement stables toutes les images par  $\omega$  d'un sous-quotient de  $N$ . Comme l'objet  $M_{\bar{k}}$  a plus de sous-quotients à respecter, on a l'inclusion

$$G_{\mathrm{geom},M} \subseteq G_{\mathrm{arith},M}.$$

Le corps de coefficients  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$  étant algébriquement clos, n'importe quel autre choix de foncteur fibre sur  $\mathbf{P}_{\mathrm{arith}}(\mathbb{G}_m)$  donne lieu à un groupe isomorphe à  $G_{\mathrm{arith},M}$  par un isomorphisme unique à un automorphisme intérieur près. Tout élément dans le groupe associé à un autre foncteur fibre définit donc une classe de conjugaison dans  $G_{\mathrm{arith},M}$ . En particulier, pour une extension finie  $E$  de  $k$  et un caractère multiplicatif  $\chi: E^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ , le Frobenius géométrique  $F_E$  est un automorphisme tensoriel de  $\omega_\chi$ , d'où des classes de conjugaison dans le groupe  $G_{\mathrm{arith},M}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \subset G_{\mathrm{arith},M}(\mathbf{C})$  que l'on notera  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}$ .

Si le faisceau pervers  $M$  est  $\iota$ -pur de poids zéro, alors il est géométriquement semi-simple d'après [2, 5.3.8]. Comme la représentation fidèle  $G_{\mathrm{geom},M} \rightarrow \mathrm{GL}(\omega(M))$  correspondant à  $M_{\bar{k}}$  est complètement réductible,  $G_{\mathrm{geom},M}$  est un groupe algébrique réductif. Dorénavant, on supposera que  $M$  est *arithmétiquement* semi-simple, c'est-à-dire, semi-simple en tant qu'objet de  $\mathbf{P}_{\mathrm{arith}}(\mathbb{G}_m)$ . Ceci signifie que  $M$  est un faisceau pervers semi-simple sur  $\mathbb{G}_{m,k}$  qui, géométriquement, n'admet pas de faisceaux de Kummer décalés comme sous-objets ni comme quotients. Dans ce cas, le groupe  $G_{\mathrm{arith},M}$  est réductif aussi. Si le caractère  $\chi$  est bon pour  $M$ , la classe de conjugaison  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}$  a des valeurs propres unitaires d'après la proposition 4.8. Choisissons un sous-groupe compact maximal  $K$  du groupe de Lie réductif  $G_{\mathrm{arith},M}(\mathbf{C})$ . Reprenant mot par mot l'argument du paragraphe 3.2, on associe à chaque  $\mathrm{Frob}_{E,\chi}$  une classe de conjugaison  $\theta_{E,\chi}$  dans  $K^\#$ .

#### 4.4. Le théorème principal

**THÉORÈME 4.9** (Katz). — *Soit  $M$  un faisceau pervers dans la catégorie  $\mathbf{P}_{\mathrm{arith}}(\mathbb{G}_m)$ . Supposons que  $M$  est  $\iota$ -pur de poids zéro, semi-simple, et que les groupes  $G_{\mathrm{geom},M}$  et  $G_{\mathrm{arith},M}$  sont égaux. Choisissons un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G_{\mathrm{arith},M}(\mathbf{C})$ . Lorsque le degré des extensions  $E/k$  tend vers l'infini, les multi-ensembles  $\{\theta_{E,\chi}\}_\chi$  bons s'équirépartissent dans  $K^\#$  selon la mesure  $\mu_{K^\#}$  induite par la mesure de Haar sur  $K$ .*

**DÉMONSTRATION** — Soit  $\mathrm{Bon}(E, M)$  l'ensemble de bons caractères  $\chi: E^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  pour l'objet  $M$  ; d'après le lemme 4.2, il est non vide dès que le degré de  $E$  est assez grand. Montrons que, pour toute fonction centrale continue  $f: K \rightarrow \mathbf{C}$ , on a

$$(12) \quad \frac{1}{|\mathrm{Bon}(E, M)|} \sum_{\chi \in \mathrm{Bon}(E, M)} f(\theta_{E,\chi}) \longrightarrow \int_K f \mu_K$$

lorsque le degré de  $E$  tend vers l'infini. En utilisant le théorème de Peter-Weyl, on se réduit à prouver que le membre gauche de (12) converge vers zéro lorsque  $f$  est la trace d'une représentation irréductible de dimension finie  $\Lambda_K$  de  $K$ .

Soit  $\Lambda$  la seule  $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation irréductible non triviale de  $G_{\text{arith},M}$  associée à  $\Lambda_K$  par le théorème 3.1. Par le biais de l'équivalence  $\langle M \rangle^\otimes \simeq \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(G_{\text{arith},M})$ , elle correspond à un faisceau pervers *simple*  $N$  dans la sous-catégorie tannakienne de  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$  engendrée par  $M$ . De plus, l'hypothèse  $G_{\text{geom},M} = G_{\text{arith},M}$  entraîne que  $N$  est *géométriquement simple*, et la non-trivialité de  $\Lambda$  se traduit par le fait que  $N_{\bar{k}}$  n'est pas isomorphe à l'objet neutre  $\delta_1$ . En termes de  $N$ , la trace  $\text{Tr}_{\Lambda_K}(\theta_{E,\chi})$  est égale à

$$S(N, E, \chi) = \sum_{x \in E^\times} \chi(x) \text{Tr}(\text{Frob}_{E,x} | N)$$

par la formule des traces de Grothendieck. Le résultat découlerait donc de l'estimée suivante lorsque le degré de  $E$  tend vers l'infini :

$$\frac{1}{|\text{Bon}(E, M)|} \sum_{\chi \in \text{Bon}(E, M)} S(N, E, \chi) = O\left(1/\sqrt{|E|}\right).$$

Pour la démontrer, remarquons d'abord qu'il suffit d'estimer la moyenne des sommes  $S(N, E, \chi)$  sur *tous* les caractères multiplicatifs. En effet, en notant  $\text{Mauv}(E, M)$  le complémentaire de  $\text{Bon}(E, M)$  dans  $E^\times$ , on a :

$$(13) \quad \frac{1}{|\text{Bon}(E, M)|} \sum_{\chi \in \text{Bon}(E, M)} S(N, E, \chi) = \left(1 + \frac{|\text{Mauv}(E, M)|}{|\text{Bon}(E, M)|}\right) \frac{1}{|E^\times|} \sum_{\chi} S(N, E, \chi) - \frac{1}{|\text{Bon}(E, M)|} \sum_{\chi \in \text{Mauv}(E, M)} S(N, E, \chi).$$

Or il y a au plus  $2\text{rg}(M)$  mauvais caractères pour l'objet  $M$  et la majoration

$$|S(N, E, \chi)| \leq \dim \omega(N)$$

est valable quel que soit  $\chi$ . En effet, comme  $N$  appartient à la catégorie tannakienne engendrée par  $M$ , c'est un faisceau pervers semisimple et  $\iota$ -pur de poids zéro ; il en va de même pour  $N \otimes \mathcal{L}_\chi$ . La cohomologie à support compact d'un tel faisceau est concentrée en degré zéro et  $H_c^0(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, N \otimes \mathcal{L}_\chi)$  est  $\iota$ -mixte de poids  $\leq 0$ , d'où l'inégalité voulue compte tenu de la formule des traces et de la remarque 4.6.

Estimons donc la moyenne des  $S(N, E, \chi)$ . Par orthogonalité des caractères, elle vaut

$$\frac{1}{|E^\times|} \sum_{\chi} S(N, E, \chi) = \frac{1}{|E^\times|} \sum_{x \in E^\times} \text{Tr}(\text{Frob}_{E,x} | N) \sum_{\chi} \chi(x) = \text{Tr}(\text{Frob}_{E,1} | N).$$

D'après la classification des faisceaux pervers simples sur une courbe (exemple 2.15), on sait que  $N$  est de l'un de ces deux types :



• Si  $N$  est ponctuel, alors il existe un point  $t \in k^\times \setminus \{1\}$  et une unité  $\ell$ -adique  $\alpha$  tels que  $N = \alpha^{\deg} \otimes \delta_t$ , la possibilité  $t = 1$  étant exclue par l'hypothèse que  $N_{\bar{k}}$  n'est pas isomorphe à  $\delta_1$ . Dans ce cas,  $\text{Tr}(\text{Frob}_{E,1}|N) = 0$ .

• Si  $N$  n'est pas ponctuel, alors il est de la forme  $\mathcal{F}[1]$  pour un faisceau extension intermédiaire  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{G}_m$ . Comme  $N$  est  $\iota$ -pur de poids zéro,  $\mathcal{F}$  est  $\iota$ -mixte de poids  $-1$ , d'où les inégalités

$$|\text{Tr}(\text{Frob}_{E,1}|N)| = |-\text{Tr}(\text{Frob}_{E,1}|\mathcal{F})| \leq \frac{\dim(\mathcal{F}_{\bar{1}})}{\sqrt{|E|}} \leq \frac{\text{rg}(\mathcal{F})}{\sqrt{|E|}},$$

où la dernière provient du fait que, pour les extensions intermédiaires, la fibre  $\mathcal{F}_{\bar{1}}$  est donnée par les invariants de  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  sous le groupe d'inertie et a donc dimension plus petite ou égale au rang générique de  $\mathcal{F}$ .

Dans les deux cas, on a  $|\text{Tr}(\text{Frob}_{E,1}|N)| \leq \text{rg}(N)/\sqrt{|E|}$ . Compte tenu de (13), on en déduit la majoration

$$\left| \frac{1}{|\text{Bon}(E, M)|} \sum_{\chi \in \text{Bon}(E, M)} S(N, E, \chi) \right| \leq \frac{2(\text{rg}(N) + \dim \omega(N))}{\sqrt{|E|}}$$

pour toute extension  $E/k$  de degré assez grand pour que  $|\text{Mauv}(E, M)| \leq \sqrt{|E|} - 1$ . C'est ce qu'il fallait pour conclure la démonstration.  $\square$

En prenant l'image directe de la mesure de Haar normalisée par la trace  $\text{Tr}: K \rightarrow \mathbf{C}$ , on trouve immédiatement le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.10.** — *Sous les hypothèses du théorème, les sommes exponentielles  $\{S(M, E, \chi)\}_{\chi \text{ bon}}$  se répartissent comme les traces de matrices aléatoires dans  $K$  lorsque le degré des extensions  $E/k$  tend vers l'infini.*

*Remarque 4.11.* — Dans [16, Theorem 7.2], Katz établit un résultat un peu plus général. Si  $M$  est semisimple,  $G_{\text{geom}, M}$  est un sous-groupe *distingué* de  $G_{\text{arith}, M}$  et il suffit de supposer que le quotient  $G_{\text{arith}, M}/G_{\text{geom}, M}$  est isomorphe à un groupe cyclique  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Dans ce cas, on choisit un sous-groupe compact maximal  $K_{\text{arith}}$  de  $G_{\text{arith}, M}(\mathbf{C})$  et on note  $K_{\text{geom}}$  son intersection avec  $G_{\text{geom}, M}(\mathbf{C})$ . C'est un sous-groupe distingué de  $K_{\text{arith}}$  avec quotient  $K_{\text{arith}}/K_{\text{geom}} = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , d'où une application  $K_{\text{arith}}^\# \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Étant donné un entier  $d$  modulo  $n$ , soient  $K_{\text{arith}, d}^\# \subset K_{\text{arith}}^\#$  l'image inverse de  $d$  par cette application et  $\mu_d^\#$  la mesure de probabilité sur  $K_{\text{arith}, d}^\#$  déduite de la mesure de Haar normalisée sur  $K_{\text{geom}}$ . Le résultat est le suivant : pour n'importe quelle suite d'extensions  $E/k$  de degré  $d$  modulo  $n$  dont les cardinaux tendent vers l'infini, les multi-ensembles de classes de conjugaison  $\{\theta_{E, \chi}\}_{\chi \text{ bon}}$  s'équirépartissent dans  $K_{\text{arith}, d}^\#$  selon la mesure  $\mu_d^\#$ .

## 4.5. Exemples

Dans ce dernier paragraphe, nous montrons comment déduire du théorème d'équirépartition de Katz les résultats annoncés dans l'introduction.

*Exemple 4.12* (Sommes de Gauss). — Soit  $\psi: k^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  un caractère additif non trivial. Alors  $M = j_0^* \mathcal{L}_\psi(1/2)[1]$  est un faisceau pervers simple sur  $\mathbb{G}_{m,k}$ , pur de poids zéro, qui n'est pas géométriquement isomorphe à un faisceau de Kummer décalé (par exemple, parce qu'il a ramification sauvage à l'infini). Par la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich, sa dimension tannakienne vaut

$$\chi(\mathbb{G}_m, N) = -\chi(\mathbb{G}_m, j_0^* \mathcal{L}_\psi) = \mathrm{Sw}_\infty(\mathcal{L}_\psi) = 1,$$

d'où des inclusions  $G_{\mathrm{geom},M} \subseteq G_{\mathrm{arith},M} \subseteq \mathrm{GL}(1)$ . Comme aucune puissance de convolution de  $M_{\bar{k}}$  n'est l'objet neutre, le groupe  $G_{\mathrm{geom},M}$  est égal à  $\mathrm{GL}(1)$  tout entier. Il s'ensuit que  $M$  est un objet de  $\mathbf{P}_{\mathrm{arith}}(\mathbb{G}_m)$  vérifiant les hypothèses du théorème. Soit  $E$  une extension de  $k$  à  $q$  éléments. Pour tout caractère multiplicatif  $\chi: E^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ , on a

$$S(M, E, \chi) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x \in E^\times} \chi(x) \psi(x) = -\frac{g(\psi, \chi)}{\sqrt{q}},$$

de sorte que  $\omega_\chi(M)$  est pur de poids zéro si  $\chi$  n'est pas trivial et de poids  $-1$  si  $\chi$  est trivial. Les bons caractères pour  $M$  sont donc les caractères non triviaux. Comme  $K = S^1$ , le corollaire 4.10 est l'énoncé que les multi-ensembles  $\{-g(\psi, \chi)/\sqrt{q}\}_{\chi \neq 1}$  sont équirépartis dans  $S^1$  selon la mesure de Haar.

Pour traiter les exemples des sommes d'Evans et de Rudnick, on aura besoin d'un résultat en théorie des représentations [16, Theorem 14.1] :

**PROPOSITION 4.13.** — *Soit  $M$  un faisceau pervers dans  $\mathbf{P}_{\mathrm{arith}}(\mathbb{G}_m)$  de dimension tannakienne deux. Supposons que  $M$  est pur de poids zéro, auto-dual et géométriquement semisimple. Si  $M$  n'est géométriquement isomorphe à aucun de ses translatés non triviaux  $[x \mapsto ax]^* M$ , où  $a \in \bar{k} \setminus 1$ , alors  $G_{\mathrm{geom},M} = G_{\mathrm{arith},M} = \mathrm{SL}(2)$ .*

*Exemple 4.14* (Sommes d'Evans). — Soit  $\psi: k^\times \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$  un caractère additif non trivial. L'objet  $M = \mathcal{L}_{\psi(x-x^{-1})}(1/2)[1]$  est pur de poids zéro. Comme  $\mathcal{L}_{\psi(x-x^{-1})}$  est un faisceau de rang un à ramification sauvage à l'infini,  $M$  est un objet géométriquement simple dans  $\mathbf{P}_{\mathrm{arith}}(\mathbb{G}_m)$ . Par la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich, il a dimension

$$\chi(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, M) = \mathrm{Sw}_0(\mathcal{L}_{\psi(x-x^{-1})}) + \mathrm{Sw}_\infty(\mathcal{L}_{\psi(x-x^{-1})}) = 2.$$

En écrivant  $\mathcal{L}_{\psi(x-x^{-1})}$  comme  $\mathcal{L}_{\psi(x)} \otimes \mathcal{L}_{\psi(-1/x)}$ , on voit que le dual de ce système local est donné par  $\mathcal{L}_{\psi(x^{-1}-x)}$ . Par suite, le dual tannakien  $M^\vee = [x \mapsto x^{-1}]^* \mathbb{D}(M)$  est égal à  $M$  et les hypothèses de la proposition 4.13 sont satisfaites. Vérifions que le translaté

$$[x \mapsto ax]^* M = \mathcal{L}_{\psi(ax-(ax)^{-1})}(1/2)[1]$$

n'est géométriquement isomorphe à  $M$  pour aucun  $a \neq 1$ . En effet, si tel était le cas,  $\mathcal{L}_{\psi((a-1)x+(1-a^{-1})x^{-1})}(1/2)[1]$  serait géométriquement trivial, mais ce système local a ramification sauvage à l'infini pour tout  $a \neq 1$ . D'après la proposition 4.13, on a  $G_{\mathrm{geom},M} = G_{\mathrm{arith},M} = \mathrm{SL}(2)$ . Puisque tous les caractères sont bons pour  $M$ , le théorème d'équirépartition de Katz est dans ce cas l'énoncé que les multi-ensembles  $\{\theta_{q,\chi}\}_\chi$

d’angles de sommes d’Evans s’équirépartissent dans l’intervalle  $[0, \pi]$  selon la mesure de Sato–Tate lorsque  $q$  tend vers l’infini.

*Exemple 4.15* (Sommes de Rudnick). — Notons  $j_1: \mathbb{G}_{m,k} \setminus \{1\} \hookrightarrow \mathbb{G}_{m,k}$  l’inclusion. Les sommes de Rudnick sont associées à l’objet

$$M = j_{1!} \mathcal{L}_{\psi(\frac{x+1}{x-1})}(1/2)[1]$$

de la catégorie  $\mathbf{P}_{\text{arith}}(\mathbb{G}_m)$ , qui est pur de poids zéro et géométriquement irréductible, par exemple parce que le faisceau  $\mathcal{L}_{\psi(\frac{x+1}{x-1})}$  a ramification sauvage en 1. La formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich donne dans ce cas l’égalité

$$\chi(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, M) = \text{dr}_1(j_{1!} \mathcal{L}_{\psi(\frac{x+1}{x-1})} + \text{Sw}_1(j_{1!} \mathcal{L}_{\psi(\frac{x+1}{x-1})})) = 1 + 1 = 2$$

car  $j_{1!} \mathcal{L}_{\psi(\frac{x+1}{x-1})}$  s’étend en un faisceau lisse en 0 et  $\infty$ . De plus, l’identité  $\frac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1} = -\frac{x+1}{x-1}$  implique que  $M$  est auto-dual. Comme 1 est le seul point de  $\mathbb{G}_m(\bar{k})$  en lequel le faisceau  $j_{1!} \mathcal{L}_{\psi(\frac{x+1}{x-1})}$  n’est pas lisse,  $M$  n’est géométriquement isomorphe à aucun translaté non trivial. D’après la proposition 4.13, on a donc  $G_{\text{geom},M} = G_{\text{arith},M} = \text{SL}(2)$  et le théorème d’équirépartition de Katz répond positivement à la question de Rudnick.

## RÉFÉRENCES

- [1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* – Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61 dirigé par A. Grothendieck.
- [2] A. A. BEĬLISON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 5–171.
- [3] B. CONRAD – « Reductive group schemes », Autour des schémas en groupes. Vol. I, Panor. Synthèses, vol. 42/43, Soc. Math. France, Paris, 2014, p. 93–444.
- [4] H. DAVENPORT – « On certain exponential sums », *J. Reine Angew. Math.* **169** (1933), p. 158–176.
- [5] P. DELIGNE – « Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques », Cohomologie étale, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, 1977, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$ .
- [6] ———, « La conjecture de Weil. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 52, p. 137–252.
- [7] E. FOUVRY & P. MICHEL – « Sur le changement de signe des sommes de Kloosterman », *Ann. of Math. (2)* **165** (2007), no. 3, p. 675–715.
- [8] O. GABBER & F. LOESER – « Faisceaux pervers  $l$ -adiques sur un tore », *Duke Math. J.* **83** (1996), no. 3, p. 501–606.

- [9] C. GAUSS – « Summatio serierum quarundam singularium », *Comment. Soc. regiae sci. Göttingen* (1811), Werke II, p. 9–45.
- [10] A. GROTHENDIECK – « Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions  $L$  », Dix exposés sur la cohomologie des schémas, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 31–45.
- [11] H. HASSE – « Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper », *J. Reine Angew. Math.* **172** (1935), p. 37–54.
- [12] N. M. KATZ – *Sommes exponentielles*, Astérisque, vol. 79, Société Mathématique de France, Paris, 1980, Cours à Orsay, automne 1979 rédigé par G. Laumon préfacé par L. Illusie.
- [13] ———, *Gauss sums, Kloosterman sums, and monodromy groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 116, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.
- [14] ———, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [15] ———, «  $L$ -functions and monodromy : four lectures on Weil II », *Adv. Math.* **160** (2001), no. 1, p. 81–132.
- [16] ———, *Convolution and equidistribution. Sato-Tate theorems for finite-field Mellin transforms*, Annals of Mathematics Studies, vol. 180, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [17] N. M. KATZ & P. SARNAK – *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 45, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [18] H. D. KLOOSTERMAN – « On the representation of numbers in the form  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  », *Acta Math.* **49** (1927), no. 3-4, p. 407–464.
- [19] P. KURLBERG & Z. RUDNICK – « Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps of the torus », *Duke Math. J.* **103** (2000), no. 1, p. 47–77.
- [20] ———, « On the distribution of matrix elements for the quantum cat map », *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 1, p. 489–507.
- [21] G. LAUMON – « Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **65** (1987), p. 131–210.
- [22] ———, « Exponential sums and  $\ell$ -adic cohomology : A survey », *Israel Journal of Mathematics* **120** (2000), no. 1, p. 225–257.
- [23] H. POINCARÉ – « Fonctions modulaires et fonctions fuchsienues », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3)* **3** (1911), p. 125–149.
- [24] M. RAYNAUD – « Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes », Séminaire Bourbaki (17e année : 1964/65), Vol. 9, exp. no. 286, 129–147, Société Mathématique de France, Paris, 1995.

- [25] L. ROSENZWEIG – « On the fluctuations of matrix elements of the quantum cat map », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2011), no. 21, p. 4884–4933.
- [26] Z. RUDNICK – « The arithmetic theory of quantum maps », *Equidistribution in number theory, an introduction*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 237, Springer, Dordrecht, 2007, p. 331–342.
- [27] H. SALIÉ – « Über die Kloostermanschen Summen  $S(u, v; q)$  », *Math. Z.* **34** (1932), no. 1, p. 91–109.
- [28] J.-P. SERRE – *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 67, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.
- [29] A. WEIL – « On some exponential sums », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **34** (1948), p. 204–207.
- [30] H. WEYL – « Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins », *Math. Ann.* **77** (1916), no. 3, p. 313–352.

Javier FRESÁN

CMLS, École Polytechnique

F-91128 Palaiseau Cedex

*E-mail*: javier.fresan@polytechnique.edu