

« ON SIMPSON'S STANDARD CONJECTURE FOR UNIPOTENT LOCAL SYSTEMS »

(d'après Tobias Krentz)

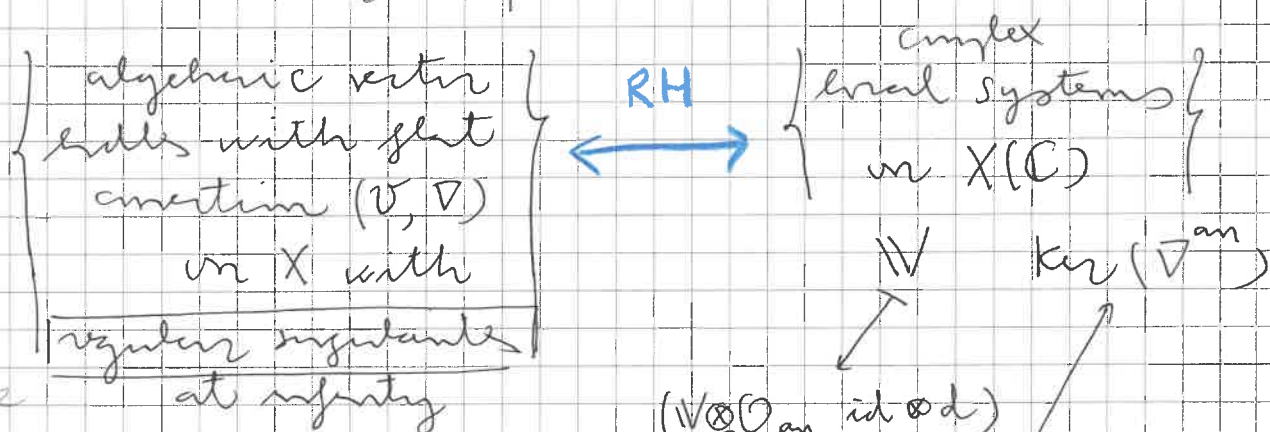
(Jussieu, 23/4/25)

① La conjecture de Simpson

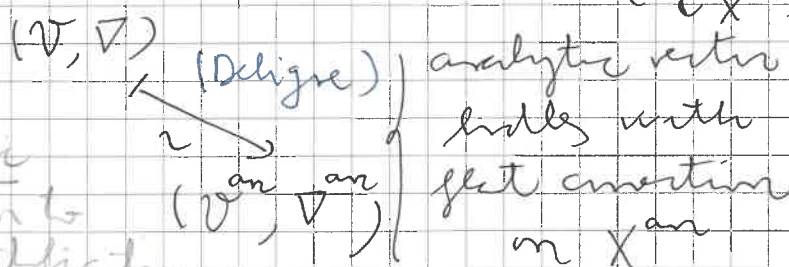
« Transcendental aspects of the Riemann-Hilbert correspondence » (1990)

Correspondance de Riemann-Hilbert

X variété algébrique lisse complexe sur $\mathbb{C}$



existence of an extension with logarithmic connection to a compactification



Supposons maintenant que X est définie sur $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

on peut alors voir les faisceaux à connexion et les systèmes locaux d'une manière d'être définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$:

pour les systèmes locaux $\rho: \pi_1(X(\mathbb{C}), x) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

c'est être conjugué à une représentation de monodromie $\pi_1(X(\mathbb{C}), x) \rightarrow GL_n(\bar{\mathbb{Q}})$

$V \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$
↑
système local de $\bar{\mathbb{Q}}$ -vecteurs

Question (Simpson) Quels sont les fibrés à connexion définis sur $\bar{\mathcal{Q}}$ dont la monodromie est aussi définie sur $\bar{\mathcal{Q}}$?

C'est une question de transcendance. Par exemple, pour $X = G_m / \bar{\mathcal{Q}}$ et la connexion $\nabla = d - \alpha \frac{dz}{z}$ sur le fibré trivial $\mathcal{O}_X$, la représentation de monodromie est $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \rightarrow \mathbb{C}^\times$
 $(x) \mapsto \exp(2\pi i \alpha)$

Il faut donc $\alpha \in \bar{\mathcal{Q}}$
 $e^{2\pi i \alpha} \in \bar{\mathcal{Q}}$ $\xrightarrow{\text{Gelfand-Schneider 1934}}$ $\alpha \in \bar{\mathcal{Q}}$ donc système local de torsion

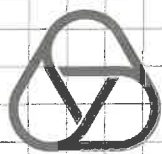
Source évidente d'exemples

X famille de variétés algébriques / $\bar{\mathcal{Q}}$
 $f \downarrow$
 Y $f^{an}: X^{an} \rightarrow Y^{an}$ est une fibration locale triviale (e.g. f lisse et propre)

$\hookrightarrow \mathcal{V} = R^n f_* \bar{\mathcal{Q}}$ est un système local défini sur $\bar{\mathcal{Q}}$ non sur $\mathbb{Z}$!

$(\mathcal{V}, \nabla) = (\mathcal{H}_{dR}^n(X/Y), \nabla_{\text{Gauss-Mannin}})$ est aussi défini sur $\bar{\mathcal{Q}}$. [C'est une manière de tenter de dire que les monodromies sont quasi-algébres]

C'est aussi vrai pour des sous-quotients d'origine géométrique (e.g. Ker, coker d'applications induites par des morphismes de variétés).



(2)

la nécessité de les considérer se voit
d'jà dans l'exemple ci-dessus. Si $x \in \mathbb{Q}$
a dénominateur d , alors on considère $X \xrightarrow{\mathbb{Z}} X$
 $\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}$
 $f_* \bar{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i=1}^d V$ la décomposition en
caractères par l'action de μ_d .

(Ceci montre aussi la nécessité de considérer
les $\bar{\mathbb{Q}}$ -systèmes locaux par rapport à $\mathbb{Q}$).

Conjecture (Simpson) Soit X une variété lisse
sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Soit V un $\bar{\mathbb{Q}}$ -système local sur X
tel que le fibre à chaque cuspide (V, ∇)
est défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Alors V est la réalisation
de Betti d'un motif sur X à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$.

on peut donner plusieurs sens
au mot motif (e.g. motif de Hodge sur une base,
système de réalisations, motif de Tate motivé, etc).

Remarques: (1) Exemple de li-algèbre

$$\begin{array}{ccc} M_{dR}(\mathbb{C}) & \xrightarrow[\sim]{RH} & M_B(\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ M_{dR}(\bar{\mathbb{Q}}) & & M_{dR}(\bar{\mathbb{Q}}) \end{array}$$

quels sont les $\bar{\mathbb{Q}}$ -points qui s'envoient sur
les $\mathbb{Q}$ -points?

(2) Inspiré par la philosophie non algébrique

$$H_{dR}^n(X)$$

$$\longleftrightarrow M_{dR}(X)$$

$$H_B^n(X)$$

$$\longleftrightarrow M_B(X)$$

$$H_{dR}^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega_X^p) \longleftrightarrow M_{dR}(X)$$

↑ space
de module de

cycles algébriques

$$\longleftrightarrow$$

origine
génétrique

filts de Higgs

c'est donc l'absence de la conjecture de périodes
de Grothendieck sous la forme, pour X propre et lisse

$$\text{sur } \bar{\mathbb{Q}}, \quad \text{comp: } H_{dR}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_B^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

$$\text{comp}(\alpha \otimes_{\mathbb{Q}} 1) = \alpha_B \otimes (2\pi i)^j \implies n=2j \text{ et } \alpha$$

est la classe
d'un cycle
algébrique sur X

[Très chère dans le papier de Deligne: énoncé
de la conjecture de périodes et ses variantes]

Un autre exemple: la conjecture de Hodge

$$\text{Im}(\alpha^p: CH^p(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_B^{2p}(X, \mathbb{C}(p)))$$

$$= H_B^{2p}(X, \mathbb{Q}(p)) \cap H^{p,p}(X, \mathbb{C}(p)) \hookrightarrow \mathbb{C}^{* \times 1}$$

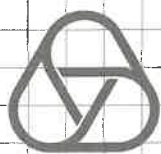
agit sur $H^{p,p}$
par α^p

Induction:

$$M_B(X)(\mathbb{Z}) \cap M_{dR}(X)^{\mathbb{C}^*} \xrightarrow{\text{action } \lambda \cdot (E, \theta)}$$

d'origine géométrique

$$= (E, \lambda \theta)$$



Question: Est-ce que les $\mathbb{Z}$ -systèmes
locaux qui portent une $\mathbb{C}$ -variation de
structures de Hodge polarisée sont d'origine
généralisée?

* Conséquences de la conjecture de Deligne

• Absoluteness I:

(V, ∇) défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$ tel que pour un
 $\sigma: \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, V est défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Alors c'est
vrai pour tout σ !

• Absoluteness II: pareil concernant par
le système local à la place de la connexion
 $\longleftrightarrow$ cycle de Hodge
absolu

• Variation de structure de Hodge:

(V, ∇) défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$ tel que V est défini
sur un corps de nombres E . Alors V porte
une variation de structures de Hodge (admissible)
avec des coefficients dans E c'est-à-dire
la donnée de V $\mathbb{Q}$ -variation de structures de
Hodge
 $E \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}[H_1(S, \mathbb{Z})]}(V)$

• Galois-type: X_F variété lisse sur un
corps de nombres F , $X = X_F \otimes_F \bar{\mathbb{Q}}$. Soit (V, ∇)
défini sur X_F tel que, pour un $\sigma: F \hookrightarrow \mathbb{C}$,

le système local V est défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Soit ℓ un nombre premier tel que

$$V: \pi_1(X_{\mathbb{C}}^{\text{an}}, x) \longrightarrow GL_n(\bar{\mathbb{Q}})$$

est entière en ℓ . Soit

$$V_{\ell}: \pi_1^{\text{ét}}(X, x) \longrightarrow GL_n(\bar{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

le complété de V . Il existe L/F extension finie telle que V_{ℓ} s'étend en

$$V_{\text{arithm}}: \pi_1^{\text{ét}}(X_L, x) \longrightarrow GL_n(\bar{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X_F, x) \rightarrow \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow 1 \quad \longleftrightarrow \quad \text{étale finie sous Galois}$$

Cas connus ($\rightarrow$ grand-chose!)

(1) systèmes locaux de rang 1

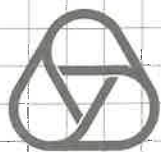
[monodromie finie! $X \hookrightarrow \bar{X}$ la monodromie sur $D = \bar{X} \setminus X$ est donnée par des vois de l'unité: $\pi_1^{\text{ét}}(Y) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\bar{X})$ vérifiant abélien fini injecté sur D tel que

$\pi^*(L, \nabla)$ a des singularités triviales

on peut supposer que (L, ∇) s'étend à $\bar{X}$. Soit un ouvert, c'est de la forme $(\mathcal{O}_U, d-w)$ avec w 1-forme à pôles d'ordre ≤ 1 et résidus $\in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Intégration de monodromie $\exp\left(\int_{\gamma_i} w\right)$

Waldschmidt [Scheider-lang]: si ils ne sont pas



(4)

tous les vœux de l'arté, alors il y en a
un qui est absurde]

(2) systèmes linéaires indéterminés de rang 2

sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ [trois hyperplans à
paramètres rationnels]

(3) Absoluteness I + II + Variation de structures
de Hodge pour les systèmes linéaires unipolaires
de rang 3 sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$. ^{Hodge structure}

[théorie des intégrales itérées + théorie de Batyagin
sur les fonctions linéaires et les logarithmes]

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \bar{\mathbb{Q}}$$

Si $\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_r)$ sont $\mathbb{Q}$ -
linéairement indépendants, alors ils sont
 $\bar{\mathbb{Q}}$ -linéairement indépendants.]

Unipolaires : c'est une théorie de la connexion
triviale.

pas de progrès depuis !

② Théorèmes de Torsion Kuntz

F corps de nombres, $S \subset \mathbb{P}^1(F)$, $X = \mathbb{P}^1 - S$

$$F \subseteq E \subseteq \bar{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$$

de Rham - Beilinson regulator

$$\text{reg}_j : K_{2j-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} E \rightarrow \mathbb{C} / (E + (2\pi i)^j E)$$

($j \geq 1$)

Théorème 1 (Kreutz) Supposons que reg_j soit injectif pour $j \leq r-2$. Soit $\mathbb{W}$ un E -système local unipotent d'indice $\leq r$ sur $X(\mathbb{C})$ tel que le fibré à connexion associée est défini sur E . Alors $\mathbb{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est la réalisation de Beilinson d'un motif de Tate mixte à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$ $M \in \text{MT}(X)_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

unipotent d'indice ≤ 2

= l'algèbre de Lie de l'image de la représentation est nilpotente avec $\eta^{(2)} = [\eta, \eta^{(2-1)}] = 0$

e.g. $0 = \mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{W}_2 = \mathbb{W}$ avec $\mathbb{W}_i / \mathbb{W}_{i-1}$

système local constant

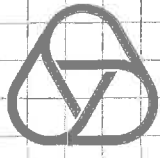
Corollaire: résultat conditionnel si

(1) $F, E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}$ quelconque
 $\mathbb{W}$ unipotent d'indice ≤ 3 [injectivité du régulateur: Beilinson]

(remarque le résultat de Simpson qui démontre seulement les injectivités)

(2) F totalement réel, $E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}$ quelconque
 $\mathbb{W}$ unipotent d'indice ≤ 4 [$K_3(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}} = 0$ par Beilinson]

(3) $F = E = \bar{\mathbb{Q}}$
 $\mathbb{W}$ unipotent d'indice ≤ 6 $K_5(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{reg}_3} \mathbb{C}/(\mathbb{Q} + (\mathbb{C}\pi i)^3 \mathbb{Q})$



a pour image la classe de $J(3)$ qui n'est pas nulle par Apéry



Théorème 2 (Kreuzer) Soit X une courbe elliptique définie sur un corps de nombres F . Soit V un $\mathbb{Q}$ -système local sur $X_{\mathbb{Q}}^n$ tel que (V, ∇) soit défini sur $\mathbb{Q}$. Alors V est de la forme

$$V = \bigoplus V_i \otimes X_i$$

où X_i est un système local à module fini
 V_i est la réalisation de Betti d'un motif sur X à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui est un sous-quotient d'une construction

$$\bigoplus_j \mathcal{H}_{Kum}^{\otimes a_j} \otimes \mathcal{H}_{Kum}^{\vee \otimes b_j} \iff \text{dans la sous-catégorie tensorielle } \langle \mathcal{H}_{Kum} \rangle$$

Variation de Kummer

$\mathcal{P}$ filtré de Hodge
 $\downarrow$
 $X^\vee \times X$

$Y = \mathcal{P}$ section zéro
 $\downarrow$ c'est un schéma semi-abélien sur X dont la fibre en $x \in X$ est l'extension
 $X^\vee \times X$
 $\downarrow$
 X

$\mathcal{H}_{Kum} = R^1 f_* \bar{\mathcal{Q}}$

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_m \rightarrow Y_X \rightarrow X^\vee \rightarrow 1$$

donnée par $x \in X = \text{Ext}^1(X^\vee, \mathcal{G}_m)$

* Remarque: un système local important sur $\mathbb{P}^1 \setminus S$ est toujours la réalisation de Betti d'un motif, même si le filé associé n'est pas défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$!

③ Quelques outils dans la preuve du Thm 1

• Motifs de Tate mixtes

Soit F un corps de nombres. On dispose de la catégorie triangulée des motifs de Voerldestey $DM(F) \supset OMT(F)$ = la plus petite sous-catégorie triangulée qui contient les objets $\mathbb{Q}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
 Par les résultats de Beilinson (calcul de la K -théorie rationnelle des corps de nombres), Lurie, Wildeshaus...

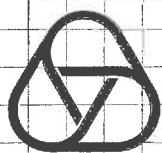
$$DMT(F) = D(MT(F))$$

↑ catégorie tannakienne $\mathbb{Q}$ -linéaire

Les objets simples de $MT(F)$ sont les $\mathbb{Q}(n)$ et tout autre objet se décompose en une somme directe de ceux-ci.

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \cong K_{2n-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

$$\text{Ext}^2(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = 0 \text{ pour tout } n$$



⑥

Un facteur fibre est donné par

$$w: MT(F) \longrightarrow \text{Vect } \mathcal{Q}$$

$$\underline{w_{dR} = w \otimes_{\mathcal{Q}} F}$$

$$M \longmapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{MT(F)}(\mathcal{Q}(n), gr_{-2n}^w M)$$

le groupe tertiaire $MT(F) = \text{Rep}(g_F^{MT})$ est
un schéma en groupe de la fibre

$$1 \longrightarrow U_F^{MT} \longrightarrow g_F^{MT} \longrightarrow G_m \longrightarrow 1$$

$\downarrow$ pro-unipotent $\uparrow$ objets semi-stables $\langle \mathcal{Q}(1) \rangle^{\otimes}$

L'extension est caractérisée par $M \longmapsto \bigoplus_n gr_{-2n}^w M :$

$$g_F^{MT} \cong U_F^{MT} \rtimes G_m$$

et la structure des extensions implique que
l'algèbre de Lie U_F^{MT} est l'algèbre de Lie liée
gradué en $\bigoplus_{n \geq 1} \text{Ext}^1(\mathcal{Q}(0), \mathcal{Q}(n))^{\vee}$.
non-carrément!

Variants: $MT(F)_E$ coefficients dans E
(si extension fine, (M, i) $M \in MT(F)$
 $i: E \rightarrow \text{End}(M)$)

et (plus important) si $S \subset \mathbb{P}^1(F)$, $X = \mathbb{P}^1 \setminus S$

$$DMT(X) = D(MT(X))$$

$$\uparrow$$

$$\text{Rep}(g_X^{MT})$$

même facteur
fibre gradué

- le groupe fondamental motivique

Soit X une variété lisse géométriquement connexe sur un corps de nombres F . Soit $x \in X(F)$.

Deligne 1989: groupe fondamental unipotent motivique $\pi_1^{\text{un}}(X, x)$

Betti: pour $\sigma: F \hookrightarrow \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \pi_{1, \beta}^{\text{un}}(X, x) &= \text{complétion pro-unipotente} \\ &\quad \text{du groupe fondamental } \pi_1(X_\sigma(\mathbb{C}), x) \\ &= \varprojlim_{\mathbb{Z}} \pi_{1, \beta}^{\text{un}, \mathbb{Z}}(X, x) \end{aligned}$$

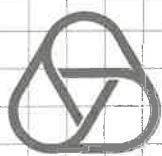
(d'après Quillen, $\Gamma^{\text{un}} = \text{Spec} \left(\varprojlim_n \left(\mathbb{Q}[\Gamma] / \mathcal{I}^n \right)^\vee \right)$)

C'est aussi le groupe
fonction de la catégorie des
systèmes locaux unipotents sur $X_\sigma(\mathbb{C})$, d'où des
sujets de Rham et étale.

de Rham: $\pi_{1, \text{dR}}^{\text{un}}(X, x) = \pi_1 \left(\begin{array}{l} \text{fibrés à connexion} \\ \text{unipotents sur } X \end{array} \right)$
+ fibre au point $x \in X$

Pour avoir des espaces vectoriels, on travaille
plutôt avec leurs algèbres de Lie:

$$\pi_{1, \beta}^{\text{un}}(X, x) \otimes_F \mathbb{C} \simeq \pi_{1, \beta}^{\text{un}}(X, x) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$



Par un théorème de Beilinson, il y a une isomorphisme

$$\mathbb{Q}[\pi_1(X, x)] / \mathbb{I}^{n+1} \longrightarrow H_n(X^n, \{x_1=x\} \vee \{x_1=x_2\} \vee \dots \vee \{x_n=x\})$$

$$\sigma: [0, 1] \longrightarrow X(\mathbb{C})$$

$$\Delta^n(\sigma) : \Delta^n \longrightarrow X^n(\mathbb{C})$$

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$$

et ceci permet de donner une structure de motif au sens plus moderne aux quotients de dimension finie. Dans le cas où $X = \mathbb{P}^1 \setminus F$, il existe un pro-objet

$$\prod_1^{\text{un}} (X, x) \in \text{Pro}(\text{MT}(F))$$

le groupe fondamental motivique (Deligne-Gabberov)

Théorème (Esnault-Kerr) :

Il y a une suite exacte de schémas en groupes affines

$$1 \longrightarrow \prod_1^{\text{un}} (X, x)_{\text{dR}} \longrightarrow \mathcal{G}_{X, E}^{\text{MT}} \longrightarrow \mathcal{G}_{F, E}^{\text{MT}} \longrightarrow 1$$

induit par $p: X \longrightarrow \text{Spec } F$

$$p^*: \text{MT}(F) \longrightarrow \text{MT}(X)$$

De plus, cette suite est scindée par x est l'action de $\mathcal{G}_{F, E}^{\text{MT}}$ sur $\prod_1^{\text{un}} (X, x)_{\text{dR}}$ qui se résulte le motif de la structure de motif de Deligne-Gabberov.

Corollaire: la catégorie $MT(X)$ est équivalente à la catégorie des paires (M, ρ)

$M \in MT(F)_E$ motif de Tate motivé sur F

$$\rho: \pi_{1dR}^{\text{un}}(X, x)_E \longrightarrow GL(W_{dR}(M))$$

représentation telle que

$$\text{d.p. } \pi_{1dR}^{\text{un}}(X, x)_E \longrightarrow \text{End}(W_{dR}(M))$$

est équivalente par l'action de $\mathcal{G}_{F,E}^{MT}$.

• La réalisation Beilinson-de Rham

$$W_{dR,B}: MT(F)_E \longrightarrow \mathcal{C}_{dR,B,E,E}$$

$$M \longmapsto (W_{dR}(M), W_B(M), \underset{W_B(M) \otimes \mathbb{C}}{W_{dR}(M) \otimes \mathbb{C}})$$

Ce foncteur est platement fidèle
et son image est stable par sous-quotients
si et seulement si

$$\text{reg}_j: \text{Ext}_{MT(F)_E}^1(E(0), E(j)) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}_{dR,B,E,E}}^1(E(0), E(j))$$

$$K_{2j-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} E \longrightarrow \mathbb{C}/(E + (2\pi i)^j E)$$

est injectif pour tout $j \geq 1$.



8

Corollaire: Soit $M \in \text{MT}(F)_E$ à poids dans $[-2(m+1), -2]$. Si reg_j est injectif pour $1 \leq j \leq m$, alors $g_{F,E}^{\text{MT}}(M) \cong g_{E,E}^{\text{dRB}}(M)$

et la réalisation de Kün-Betti est pleinement fidèle sur $\langle M \rangle^\oplus$.

Remarque: la réalisation l-codage

$$w_x: \text{MT}(F)_{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\text{Gal}(\bar{F}/F))'$$

est pleinement fidèle car dans ce cas l'analyse du régulateur est injectif par un résultat de Saito.

Variante: $\mathcal{C}_{\text{dRB}, X, E}^{\text{un}}$ catégorie des triplets

$$(W, (V, \nabla), c)$$

$$C: W \otimes_E \mathcal{O}_{X_\circ}^{\text{un}} \simeq V \otimes \mathcal{O}$$

$\nearrow$
E-Système local
intégral

$\nwarrow$ filtré
à connexion
intégrale

isomorphisme
horizontal de
fibrés analytiques

Cette catégorie est équivalente à:

$$(V, \rho)$$

$$V = (V_S, V_{\text{dR}}, c) \in \mathcal{C}_{\text{dRB}, E, E}$$

$$\rho: \prod_{\text{dR}}^{\text{un}}(X, x)_E \rightarrow \text{GL}(V_{\text{dR}}) \text{ telle que}$$

$$\text{d.g. } \prod_{\text{dR}}^{\text{un}}(X, x)_E \rightarrow \text{End}(V_{\text{dR}}) \text{ est équivalente}$$

par l'action de $g_{E,E}^{\text{dRB}}$.

④ Preuve du Théorème 1 On se donne:

V E -système local d'indice ≤ 2

(V, ∇) défini sur E

On donne considérant à:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{1B}^{m,2} \otimes_E \mathbb{C} & \xrightarrow{f_{B,\mathbb{C}}} & \mathfrak{gl}(V_B \otimes_E \mathbb{C}) \\ \text{RH} \downarrow & \searrow & \downarrow \text{conjugaison par } c: V_B \otimes_E \mathbb{C} \simeq V_{dR} \otimes_E \mathbb{C} \\ \Pi_{1dR}^{m,2} \otimes_E \mathbb{C} & \xrightarrow{f_{dR,\mathbb{C}}} & \mathfrak{gl}(V_{dR} \otimes_E \mathbb{C}) \end{array}$$

Posons:

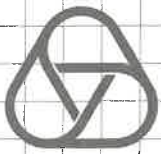
$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{dR} &= \text{Im } f_{dR} \subseteq \mathfrak{gl}(V_{dR}) \\ \mathfrak{h}_B &= \text{Im } f_B \subseteq \mathfrak{gl}(V_B) \end{aligned}$$

Pour montrer que $(V, \nabla)_{\bar{a}}$ est la réalisation de de Rham d'un motif dans $MT(X)_{\bar{a}}$, il suffit de construire une représentation

$$\alpha: \mathcal{G}_{F, \bar{a}}^{MT} \longrightarrow GL(V_{dR}, \bar{a})$$

telle que $f_{dR, \bar{a}}$ est équivariant pour l'action de $\mathcal{G}_{F, \bar{a}}^{MT}$. Soient $N \subseteq GL(V_{dR})$
 $C \subseteq GL(V_{dR})$

le normalisateur et le centralisateur de $\mathfrak{h}_{dR}$.
 α cherchée a son image dans $N_{\bar{a}}$.



Construction en deux étapes:

$$(1) \alpha: g_{F,E}^{MT} \longrightarrow N/C$$

telle que $\forall_{dR}: \Pi_{1,dR}^{m,n} \rightarrow h_{dR}$ st équivant
par l'action de $g_{F,E}^{MT}$ in h_{dR} via $N/C \subset GL(h_{dR})$

(2) après extension de scalaires à $\bar{a}$,

$$\alpha \text{ se relève en } \bar{\alpha}: g_{F,\bar{a}}^{MT} \longrightarrow N_{\bar{a}} \subseteq GL(V_{dR,\bar{a}})$$

en gardant la propriété d'équivalence.

Étape (1)

On travaille dans la catégorie $\mathcal{C}_{dR,B,E,\bar{E}}$.

$$\begin{array}{c} g_{dR,B} \xrightarrow{\quad \beta \quad} N \longrightarrow N/C \subseteq GL(h_{dR}) \\ \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\ g_{dR,B}(\Pi_1^{m,n}) \end{array}$$

Mais par l'hypothèse sur l'injectivité des
régulateurs, $g_{dR,B}(\Pi_1^{m,n}) = g_{F,E}^{MT}(\Pi_1^{m,n})$

d'où une représentation

$$g_{F,E}^{MT} \twoheadrightarrow g_{F,E}^{MT}(\Pi_1^{m,n}) \longrightarrow N/C$$

Étape (2) $\bar{\alpha}: g_{F,\bar{a}}^{MT} \longrightarrow (N/C)_{\bar{a}}$ se relève

Comme $g_{F, \bar{Q}}^{MT} = U_{F, \bar{Q}}^{MT} \forall G_m$, il suffit de travailler avec $\bar{\alpha}_1: G_m \rightarrow N/C$ et $\bar{\alpha}_2: U_{F, \bar{Q}}^{MT} \rightarrow N/C$.

Il y a toujours un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha_1} & N \\ G_m & \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} & N/C \\ & & \downarrow \end{array}$$

L'action adjointe de α_1 fait de $\eta = \text{Lie } N$ un module de Lie gradué $\eta = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i$. On a

$$\begin{array}{ccc} & \eta \supset \mathfrak{a} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{a}}) \cap \bigoplus_{i \geq 1} \eta_i & \\ & \downarrow \pi & \\ U_{F, \bar{Q}}^{MT} & \xrightarrow{d\bar{\alpha}_2} & N/C \end{array}$$

$\bar{\mathfrak{a}} = \text{image de } d\bar{\alpha}_2$

Il existe un module d'algèbre de Lie gradué

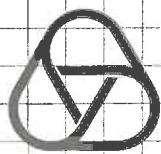
$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{a} & \\ U_{F, \bar{Q}}^{MT} & \xrightarrow{d\bar{\alpha}_2} & \mathfrak{a} \\ & & \downarrow \pi \end{array}$$

$$\text{Hom}_{\text{gr Lie}}(U_{F, \bar{Q}}^{MT}, \mathfrak{a}) \xrightarrow{\quad} \text{Hom}_{\text{gr Lie}}(U_{F, \bar{Q}}^{MT}, \bar{\mathfrak{a}})$$

$\uparrow$ surgit si $\mathfrak{a} \rightarrow \bar{\mathfrak{a}}$ gradué nilpotent Lie
 primitif
 free gradué
 Lie algèbre

□

Remarque: la preuve du Théorème 2 est similaire.
Comme le groupe gradué d'un anneau elliptique est



(10)

commutatif, l'anneau de $\mathbb{Z}[a, b]$ de la même est de la forme $\mathbb{G}_a^n \times T$ et sa ^{semi.} simplification est donnée par la projection sur la composante T .

$$W \cong \bigoplus_i W_i \otimes X_i$$

↑
multiplicité
d'indice 2

Il suffit de montrer le cas des W_i et le résultat de transversalité qui garantit une égalité de groupes tangents est le théorème de Kuranishi.

□

