

UNE INTRODUCTION AUX PÉRIODES

JAVIER FRESÁN

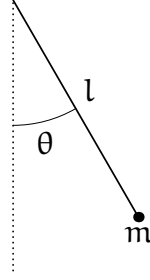
TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
1.1. La période d'un pendule	1
2. Définition et exemples	2
2.1. Définition et premières propriétés	3
2.2. Exemples	4
2.3. Plus de souplesse : intégrales de fonctions algébriques	5
2.4. Les périodes exponentielles	6
3. La conjecture de Kontsevich–Zagier	7
3.1. Une version précisée de la conjecture de Kontsevich–Zagier	8
3.2. Ce qui est connu	8
4. Interprétation cohomologique	9
4.1. Homologie singulière	10
4.2. Variétés algébriques affines	12
4.3. Cohomologie de de Rham	13
4.4. L'accouplement de périodes	16
4.5. Une variante : cohomologie relative	20
5. Vers une théorie de Galois pour les nombres transcendants	22
Références	23

1. INTRODUCTION

Il sera question dans ces exposés d'une classe de nombres, les *périodes*, dont on pourrait retracer l'origine jusqu'aux premières heures du calcul intégral. Car, avant de devenir objets du désir des arithméticiens, ces nombres furent surtout les périodes de révolution des planètes ou le temps que met un pendule à revenir à sa position initiale...

1.1. La période d'un pendule. Considérons un pendule de longueur ℓ et de masse m qui oscille sans frottement dans le plan vertical, sa position étant repérée par l'angle θ . Son mouvement est décrit par la deuxième loi de Newton $F = ma$ reliant la force F et l'accélération a , ce qui donne dans ce cas $a = -G\ell \sin \theta$, où G désigne la constante de gravitation. En exprimant



l'accélération comme la dérivée seconde de la longueur d'arc $\ell\theta$, on trouve par suite l'équation différentielle de second ordre

$$(1.1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{G}{l} \sin \theta = 0,$$

qui n'admet pas de solution en termes de fonctions élémentaires. Si l'on ne s'intéresse qu'aux oscillations de petite amplitude θ_0 , on peut remplacer $\sin \theta$ par son développement limité à l'ordre un θ ; l'équation qui en résulte a alors pour solution $\theta_0 \cos(\sqrt{G/\ell}t)$, d'où la valeur approchée pour la période du pendule $T = 2\pi\sqrt{\ell/G}$.

Pour calculer la valeur exacte de T , une possibilité consiste à multiplier (1.1) par $d\theta/dt$, puis intégrer par parties. On trouve alors l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2G}{\ell}(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

qui, par inversion, permet d'exprimer la période du pendule comme l'intégrale

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2G}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{G}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}},$$

où l'on a utilisé l'identité trigonométrique $\cos \theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$. Introduisant le *module elliptique* $k = \sin(\theta_0/2)$, on aboutit à l'*intégrale elliptique de première espèce*

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{G}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{G}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

par le biais des changements de variable $\sin(\theta/2) = k \sin \phi$ et $x = \sin \phi$. Si k est algébrique, c'est un exemple paradigmatique de période au sens de la théorie des nombres.

2. DÉFINITION ET EXEMPLES

Dans cette section, on présente une définition élémentaire de période due à Kontsevich et Zagier [13] et on en déduit quelques conséquences, comme le fait que les périodes forment un sous-anneau dénombrable des nombres complexes. On donne ensuite plusieurs exemples de périodes (les nombres algébriques, π , les logarithmes des nombres rationnels, les intégrales elliptiques, les valeurs multizêtas...) sur lesquels on reviendra par la suite.

2.1. Définition et premières propriétés. Soit $n \geq 1$ un entier. Rappelons que les *fonctions rationnelles* à coefficients rationnelles de n variables sont les quotients de polynômes dans $\mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n]$ et qu'un domaine S de \mathbf{R}^n est dit *\mathbf{Q} -semi-algébrique* s'il est de la forme

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid P(x_1, \dots, x_r) \geq 0\}$$

avec $P \in \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n]$ ou bien il peut être obtenu à partir de ceux-ci en itérant un nombre fini de fois les opérations « réunion », « intersection » et « complémentaire ».

Définition 2.1 (Kontsevich–Zagier). Une *période* est un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire peuvent s'écrire comme des intégrales absolument convergentes

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

où f est une fonction rationnelle à coefficients rationnels de n variables et $S \subset \mathbf{R}^n$ est un domaine \mathbf{Q} -semi-algébrique de dimension n .

Comme l'intégrande et le domaine d'intégration sont obtenus à partir de polynômes à coefficients rationnels, les périodes forment un sous-ensemble *dénombrable* des nombres complexes. Un nombre complexe « pris au hasard » n'est donc pas une période. Cependant, on va voir que beaucoup de constantes de la vie mathématique courante sont des périodes.

Lemme 2.2. *Les périodes sont ceux nombres complexes dont la partie réelle et imaginaire peuvent s'écrire comme des différences*

$$\text{vol}(S_1) - \text{vol}(S_2),$$

où S_1 et S_2 sont des domaines \mathbf{Q} -semi-algébriques de volume fini.

Démonstration. Soit $\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ une période. En décomposant le domaine d'intégration S comme réunion des sous-ensembles $S_+ = \{f \geq 0\}$ et $S_- = \{f \leq 0\}$, on a

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{S_+} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n - \int_{S_-} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Comme l'intégrale de départ est supposée *absolument* convergente, les deux dernières intégrales sont des nombres réels positifs. Afin de les écrire comme des volumes, on introduit une nouvelle variable t et on considère les sous-ensembles de \mathbf{R}^{n+1} définis par

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x_1, \dots, x_n, t) \in S_+ \times \mathbf{R} \mid 0 \leq t \leq f(x_1, \dots, x_n)\}, \\ S_2 &= \{(x_1, \dots, x_n, t) \in S_- \times \mathbf{R} \mid 0 \geq t \geq f(x_1, \dots, x_n)\}. \end{aligned}$$

Il s'agit de domaines \mathbf{Q} -semi-algébriques car f est une fonction rationnelle ; si $f = P/Q$, on peut par exemple écrire le premier comme la réunion et intersection

$$S_1 = \{0 \leq t\} \cap ((\{tQ - P \leq 0\} \cap \{Q \geq 0\}) \cup (\{tQ - P \geq 0\} \cap \{Q \leq 0\})).$$

Par construction, le volume de S_1 est égal à

$$\text{vol}(S_1) = \int_{S_1} dx_1 \dots dx_n dt = \int_{S_+} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

et de même pour S_2 en remplaçant S_+ par S_- . On a donc écrit la période de départ comme $\text{vol}(S_1) - \text{vol}(S_2)$. L'implication réciproque, tout aussi simple, est laissée en exercice. \square

Lemme 2.3. *Les périodes forment un sous-anneau de \mathbf{C} contenant \mathbf{Q} .*

Démonstration. En écrivant $r = \int_{0 \leq x \leq r} dx$, on voit que tout nombre rationnel r est une période. Il suffit donc de démontrer que l'ensemble des périodes est stable par addition et multiplication. Dans le deuxième cas, il s'agit d'une simple application du théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \cdot \int_T g(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m \\ = \int_{S \times T} f(x_1, \dots, x_n) g(y_1, \dots, y_m) dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m \end{aligned}$$

car, si f et g sont des fonctions rationnelles, fg en est une aussi et, si $S \subset \mathbf{R}^n$ et $T \subset \mathbf{R}^m$ sont des domaines \mathbf{Q} -semi-algébriques, leur produit $S \times T \subset \mathbf{R}^{n+m}$ l'est également.

Pour démontrer que les périodes sont stables par addition, on peut supposer sans perte de généralité que les deux intégrales ont même nombre de variables (en effet, si l'on avait disons $m < n$, il suffirait de voir g comme une fonction à n variables et d'utiliser l'identité $\int_T g(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_{T \times [0,1]^{n-m}} g(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_n$ pour ramener l'intégrale à \mathbf{R}^n). Supposons donc que les deux périodes sont données par des intégrales sur \mathbf{R}^n . Après avoir écrit chacune d'entre elles comme une différence de volumes en s'appuyant sur le lemme 2.2, il suffit de voir que

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_1) + \text{vol}(T_1) - \text{vol}(S_2) - \text{vol}(T_2) \\ = \text{vol}(S_1 \cup T_1) + \text{vol}(S_1 \cap T_1) - \text{vol}(S_2 \cup T_2) - \text{vol}(S_2 \cap T_2) \end{aligned}$$

est encore une différence de volumes. Or, en posant $A_i = S_i \cup T_i$ et $B_i = S_i \cap T_i$ pour $i = 1, 2$ et en choisissant quatre intervalles disjoints $I_1, I_2, I_3, I_4 \subset \mathbf{R}$ de longueur 1 et d'extrémités rationnelles, on peut récrire la quantité ci-dessus comme

$$\text{vol}((A_1 \times I_1) \cup (B_1 \times I_2)) - \text{vol}((A_2 \times I_3) \cup (B_2 \times I_4)),$$

ce qui achève la démonstration. □

2.2. Exemples.

Exemple 2.4 (Les nombres algébriques). On vient de voir que les nombres rationnels sont des périodes ; il en va de même pour les algébriques. Rappelons qu'un nombre complexe α est dit *algébrique* s'il existe un polynôme à coefficients rationnels $P \in \mathbf{Q}[x]$ tel que $P(\alpha) = 0$; le seul polynôme unitaire et irréductible ayant cette propriété est alors appelé le *polynôme minimal* de α . La partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre algébrique étant des réels algébriques, il suffit de traiter le cas où α est réel ; on peut aussi supposer que α est strictement positif. Soient donc $\alpha > 0$ un nombre algébrique et P son polynôme minimal. Pour voir que α est une période, il suffit de démontrer que l'ensemble $\{0 \leq x \leq \alpha\}$ est \mathbf{Q} -semi-algébrique. Comme α est une racine simple de P , il existe des nombres rationnels $0 < r < \alpha < s$ tels que P soit strictement monotone dans l'intervalle $[r, s]$. L'écriture

$$\{0 \leq x \leq \alpha\} = \{0 \leq x \leq r\} \cup (\{r \leq x \leq s\} \cap \{\varepsilon P(x) \leq 0\}),$$

avec $\varepsilon = 1$ si P est croissante et $\varepsilon = -1$ si P est décroissante, permet alors de conclure.

Exemple 2.5 (Le nombre π). La définition du nombre transcendant π comme l'aire du cercle unité montre qu'il s'agit d'une période :

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy.$$

On aurait pu choisir maintes autres formules intégrales, par exemple

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{2dx}{1+x^2},$$

ce qui met en évidence le fait qu'il existe en général beaucoup de façons différentes de représenter un même nombre comme période. D'après la conjecture de Kontsevich–Zagier, on devrait pouvoir naviguer à travers toutes ces représentations avec les règles de base du calcul différentiel (bilinéarité, changement de variables, formule de Stokes) pour seuls outils.

Exemple 2.6 (Logarithmes). Soit $q > 1$ un nombre rationnel. La représentation intégrale

$$\log(q) = \int_1^q \frac{dx}{x}$$

montre que le logarithme de q est une période. Il en va de même pour « le » logarithme de n'importe quel nombre algébrique non nul. D'après un théorème de Baker, une combinaison $\overline{\mathbf{Q}}$ -linéaire de logarithmes de nombres algébriques est nulle ou transcendante [15].

Exemple 2.7 (Valeur zêta). Les valeurs spéciales

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

de la fonction zêta de Riemann aux entiers $n \geq 2$ sont également des périodes. En effet, ces nombres admettent la représentation intégrale

$$\zeta(n) = \int_{[0,1]^n} \frac{dx_1 \dots dx_n}{1 - x_1 x_2 \dots x_n},$$

comme on le voit en développant l'intégrande comme série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} (x_1 \dots x_n)^k$ et intégrant terme à terme n fois. Plus généralement, étant donné un entier $\ell \geq 1$ et des entiers n_1, \dots, n_ℓ tels que $n_1 \geq 2$, la *valeur zêta multiple*

$$\zeta(n_1, \dots, n_\ell) = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_\ell \geq 1} \frac{1}{k_1^{n_1} \dots k_\ell^{n_\ell}}$$

est une période (voir les exposés de Clément Dupont dans ces journées).

2.3. Plus de souplesse : intégrales de fonctions algébriques. Dans la définition 2.1, il n'est question que d'intégrales de formes différentielles de degré maximal. Heureusement, l'ensemble des périodes reste inchangé si l'on autorise également des intégrales

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \dots dx_{i_d}$$

où $S \subset \mathbf{R}^n$ est \mathbf{Q} -semi-algébrique de dimension $d \leq n$. Une conséquence immédiate est qu'on peut remplacer, dans la définition de Kontsevich–Zagier, les coefficients rationnels par des

coefficients algébriques et les fonctions rationnelles par des fonctions *algébriques* sans changer la classe de périodes. Par exemple, l'intégrale elliptique

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}$$

n'est pas à première vue une période au sens de la définition 2.1, mais en introduisant une nouvelle variable on peut la récrire comme

$$\int_{\substack{y^2=x(x-1)(x-\lambda) \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx}{y}.$$

De même, pour démontrer que les valeurs de la fonction bêta

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

sont des périodes lorsque a et b sont rationnels, on pose $a = r/d$ et $b = s/d$ et on récrit $B(a, b)$ comme une intégrale sur la courbe de Fermat $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^d + y^d = 1\}$.

2.4. Les périodes exponentielles. Conjecturalement, le nombre e , la constante d'Euler γ ou les valeurs spéciales de la fonction gamma ne sont pas de périodes. On peut pourtant les traiter sur un même pied en élargissant la définition comme suit :

Définition 2.8. Une *période exponentielle* est un nombre complexe dont la partie réelle et imaginaire peuvent s'écrire comme des intégrales absolument convergentes de la forme

$$\int_S e^{-f(x_1, \dots, x_n)} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

où f et g sont des fonctions rationnelles à coefficients rationnels et $S \subset \mathbf{R}^n$ est un domaine \mathbf{Q} -semi-algébrique de dimension n .

Exemple 2.9 (La racine carrée de π). L'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

est une période exponentielle. Rappelons la preuve de cette identité. Comme l'intégrale est positive, il suffit de montrer que son carré vaut π , ce qui par Fubini revient à calculer

$$(2.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Or, en changeant aux coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, cette intégrale se récrit

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi \int_0^{\infty} d(e^{-r^2}) = \pi.$$

Ceci montre que des périodes a priori exponentielles telles que (2.10) peuvent en fait être égales à des périodes classiques. La monographie [9] contient une étude détaillée de cette question.

Exemple 2.11 (Valeurs spéciales de la fonction gamma). Plus généralement, les valeurs de la fonction gamma en des nombres rationnels sont des périodes exponentielles. En effet,

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{a}{n}-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-x^n} x^{a-1} dx.$$

On conjecture que, à dénominateur fixe, toutes les relations algébriques entre les $\Gamma(a/n)$ découlent de la formule des compléments $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$ et de la formule de multiplication pour la fonction gamma [1].

3. LA CONJECTURE DE KONTSEVICH–ZAGIER

La même période admet, on l'a vu, de nombreuses représentations intégrales. Après avoir formalisé la notion de période, Kontsevich et Zagier conjecturent qu'on peut toujours passer d'une représentation à une autre par une combinaison des trois relations élémentaires

- (i) *bilinéarité* : pour f et g des fonctions rationnelles et S et T des domaines \mathbf{Q} -semi-algébriques disjoints,

$$\int_S (f + g) = \int_S f + \int_S g, \quad \int_{S \cup T} f = \int_S f + \int_T f;$$

- (ii) *changement de variables* : pour tout changement de variables algébrique φ ,

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\varphi^{-1}(S)} (f \circ \varphi)(y_1, \dots, y_n) |J_\varphi| dy_1 \dots dy_n;$$

- (iii) *formule de Stokes* : pour toute sous-variété orientée S de \mathbf{R}^n et toute forme différentielle ω à coefficients des fonctions rationnelles sur S ,

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Conjecture 3.1 (Kontsevich–Zagier). *Toutes les relations linéaires entre périodes découlent de la bilinéarité, le changement de variables et la formule de Stokes.*

Bien que l'énoncé ne concerne a priori que les relations *linéaires*, il s'agit en fait d'une conjecture sur toutes les relations *algébriques* car, les périodes étant un sous-anneau de \mathbf{C} qui contient les nombres algébriques, toute relation polynomiale donne lieu à une relation linéaire.

Exemple 3.2. Soient $a, b > 1$ des nombres rationnels. L'identité $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ est, au vu de l'exemple 2.6, une relation entre périodes qui devrait, selon la conjecture de Kontsevich–Zagier, découler des règles ci-dessus. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \int_1^{ab} \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} && \text{(bilinéarité)} \\ &= \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dy}{y} && \text{(changement de variables } x = ay) \\ &= \log(a) + \log(b). \end{aligned}$$

3.1. Une version précisée de la conjecture de Kontsevich–Zagier. L'énoncé de la conjecture 3.1 est certes un peu flou, surtout en ce qui concerne comment obtenir une relation entre périodes à partir des trois règles de calcul. Le but de cette section est d'en donner une version beaucoup plus précise suivant les travaux d'Ayoub [5, 6, 7].

Pour chaque entier $n \geq 0$, notons

$$\overline{\mathbb{D}}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid |z_i| \leq 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n\}$$

le polydisque fermé dans \mathbf{C}^n et $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ l'anneau des séries de puissances

$$f = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1, \dots, j_n} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$$

qui ont polyrayon de convergence > 1 . Soit $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ le sous-anneau de $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ formé des séries de puissances qui sont algébriques sur $\mathbf{Q}(z_1, \dots, z_n)$, c'est-à-dire, qui satisfont à une équation polynomiale dont les coefficients sont des fonctions rationnelles à coefficients rationnels. Regardant une fonction à n variables comme à $n + 1$ variables donne des inclusions

$$\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^n) \subset \mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^{n+1})$$

et on désigne par $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ la réunion de tous les $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^n)$. À un élément $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ on peut associer son intégrale

$$\int_{[0,1]^n} f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n,$$

qui est une période au sens de Kontsevich–Zagier. Comme la valeur de cette intégrale ne change pas si l'on regarde f comme une fonction en $n + 1$ variables et on intègre sur $[0, 1]^{n+1}$, on dispose d'une application \mathbf{Q} -linéaire

$$(3.3) \quad \int_{[0,1]^\infty} : \mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty) \longrightarrow \mathbf{C}.$$

On peut démontrer (mais ce n'est pas facile!) que l'image de cette application est précisément l'anneau des périodes au sens de Kontsevich–Zagier.

Conjecture 3.4. *Le noyau de l'application (3.3) est le \mathbf{Q} -sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ engendré par les éléments de la forme*

$$\frac{\partial g}{\partial z_i} - g|_{z_i=1} + g|_{z_i=0},$$

où g est une fonction dans $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ et $i \geq 1$ est un entier.

3.2. Ce qui est connu. J'aurais du mal à imaginer une conjecture plus désespérément hors de portée et à conséquences plus profondes que celle de Kontsevich–Zagier ; il faut donc s'attendre à un paragraphe court... Quand il s'agit d'intégrales en une variable, on peut relier les périodes aux groupes algébriques et utiliser des techniques poussées en théorie de la transcendance, notamment le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz, pour déterminer toutes les relations *linéaires*. Mais, contrairement à la conjecture générale, ceci ne suffit pas à contrôler les relations algébriques car les périodes en une variable ne sont pas stables sous produit. Le résultat le plus complet est paru en ligne il y a quelques mois [12] :

Théorème 3.5 (Huber–Wüstholz). *La conjecture de Kontsevich–Zagier vaut pour les périodes en une variable.*

Dans une autre direction, Ayoub a récemment démontré une variante « géométrique » de la conjecture de Kontsevich–Zagier, sous la forme précisée du numéro précédent, où les périodes sont remplacées par des séries de périodes. Pour l'énoncer, considérons l'anneau

$$\mathcal{O}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^n) = \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}^n)[[t]][t^{-1}]$$

des séries de Laurent $F = \sum_{i \gg -\infty} f_i(z_1, \dots, z_n) t^i$ à coefficients $f_i \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}^n)$, ainsi que le sous-anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^n)$ le sous-anneau formé par celles qui sont algébriques sur $\mathbf{Q}(z_1, \dots, z_n, t)$; les coefficients d'une telle série appartiennent alors à $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^n)$, mais la réciproque est fautive. Posons $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^n)$ et considérons l'application \mathbf{C} -linéaire

$$(3.6) \quad \mathcal{O}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty) \longrightarrow \mathbf{C}((t))$$

$$\sum_{i \gg -\infty} f_i t^i \longmapsto \sum_{i \gg -\infty} \left(\int_{[0,1]^\infty} f_i \right) t^i.$$

Les *séries de périodes* sont les éléments dans l'image de cette application.

Théorème 3.7 (Ayoub). *Le noyau de (3.6) est le \mathbf{C} -sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ engendré par les éléments suivants :*

(1) *tous les éléments de la forme*

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} - F|_{z_i=1} + F|_{z_i=0},$$

où F est une fonction dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ et $i \geq 1$ est un entier.

(2) *tous les éléments de la forme*

$$\left(g - \int_{[0,1]^n} g \right) \cdot F,$$

où $g, F \in \mathcal{O}_{\text{alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ sont des fonctions telles que $\partial g / \partial t = 0$ et que $\partial g / \partial z_i \cdot \partial F / \partial z_i = 0$ pour tout entier $i \geq 1$ (dit autrement, g ne dépend pas de l'indéterminée t et F et g ne dépendent pas simultanément d'une même variable z_i).

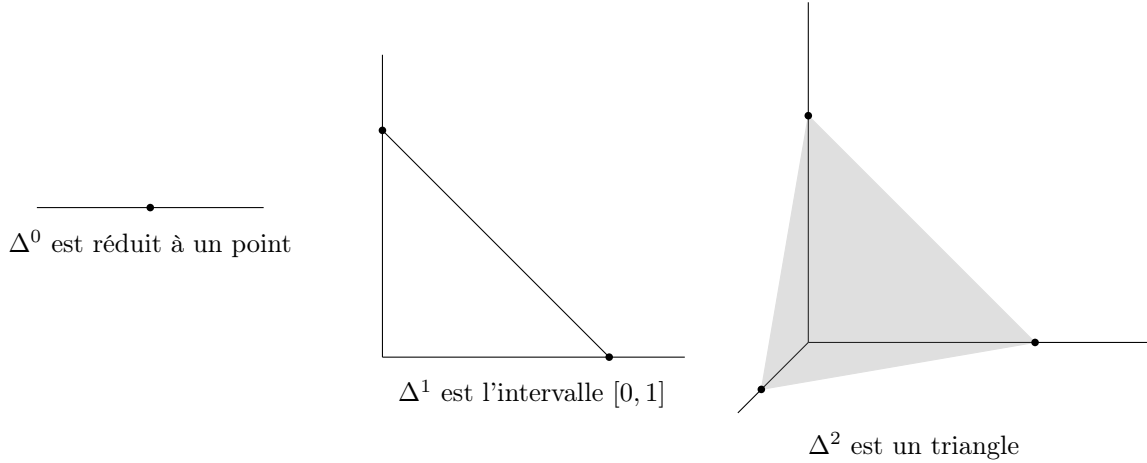
4. INTERPRÉTATION COHOMOLOGIQUE

Le but de cette section est d'introduire un point de vue plus sophistiqué sur les périodes, qui consiste à réinterpréter l'intégrande dans la définition 2.1 comme la classe d'une forme différentielle algébrique en cohomologie de de Rham, le domaine d'intégration comme la classe d'un cycle topologique en homologie singulière et le processus d'intégration comme un accouplement entre ces deux espaces vectoriels. C'est ce point de vue qui est à l'origine de tous les progrès vers la conjecture de Kontsevich–Zagier. Il nous permettra également d'associer à une période d'autres périodes jouant un rôle semblable aux conjugués d'un nombre algébrique.

4.1. **Homologie singulière.** Soit $n \geq 0$ un entier. Le n -simplexe Δ^n est l'ensemble

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, x_0 + \dots + x_n = 1\}$$

muni de la topologie de sous-espace induite par celle de \mathbf{R}^{n+1} . Voici les premiers exemples :



Lorsque n varie, les n -simplexes sont reliés par des applications *face* $\delta_n^i: \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$, définies pour chaque entier $i = 0, \dots, n+1$ par la formule

$$\delta_n^i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Elles encodent les différentes manières d'inclure un n -simplexe dans le bord d'un $n+1$ -simplexe. Par exemple, on peut voir le point Δ^0 comme une des deux extrémités du segment $[0, 1]$ et celui-ci, à son tour, comme un des trois côtés du triangle Δ^2 .

Soit M un espace topologique. Un n -simplexe singulier dans M est une application continue $\sigma: \Delta^n \rightarrow M$ et une n -chaîne singulière dans M est une combinaison linéaire à coefficients entiers d'un nombre fini de n -simplexes singuliers. On note

$$C_n(M) = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow M} \mathbf{Z} \sigma$$

le groupe des n -chaînes singulières dans M . Par exemple, $C_0(M)$ est le groupe abélien libre engendré par les points de l'espace topologique M et $C_1(M)$ est le groupe abélien libre engendré par les chemins joignant deux points, distincts ou pas, de M .

En s'appuyant sur les faces, on définit pour chaque entier $n \geq 1$ l'application *bord*

$$(4.1) \quad \partial_n: C_n(M) \longrightarrow C_{n-1}(M)$$

$$\sigma \longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \delta_{n-1}^i)$$

que l'on étend ensuite par linéarité à toute n -chaîne singulière; pour avoir des notations uniformes dans la suite, il sera utile de poser $\partial_0 = 0$. Par exemple, le bord d'un chemin $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$ est la chaîne singulière $\sigma(1) - \sigma(0)$, c'est-à-dire, la différence entre le point final et le point initial du chemin; le bord d'un 2-simplexe singulier $\sigma: \Delta^2 \rightarrow M$ est la somme alternée de chemins obtenue en restreignant σ à chacun des trois côtés du triangle.

Grâce aux signes alternés dans la formule pour le bord (4.1), on vérifie par un calcul direct que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Par exemple, en calculant deux fois le bord d'un 2-simplexe singulier $\sigma: \Delta^2 \rightarrow M$, on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2\sigma) &= \partial_1(\sigma \circ \delta_1^0 - \sigma \circ \delta_1^1 + \sigma \circ \delta_1^2) \\ &= \sigma \circ \delta_1^0 \circ \delta_0^0 - \sigma \circ \delta_1^0 \circ \delta_0^1 - \sigma \circ \delta_1^1 \circ \delta_0^0 + \sigma \circ \delta_1^1 \circ \delta_0^1 + \sigma \circ \delta_1^2 \circ \delta_0^0 - \sigma \circ \delta_1^2 \circ \delta_0^1 \\ &= \sigma(0, 0, 1) - \sigma(0, 1, 0) - \sigma(0, 0, 1) + \sigma(1, 0, 0) + \sigma(0, 1, 0) - \sigma(1, 0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'image de l'application ∂_{n+1} , qui est un sous-groupe du groupe abélien $C_n(M)$, est contenue dans le noyau de l'application ∂_n , et on peut donc prendre le quotient.

Définition 4.2. Le groupe d'*homologie singulière* en degré $n \geq 0$ de M est le quotient

$$H_n(M, \mathbf{Z}) = \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1}).$$

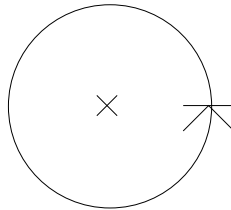
Les n -chaînes singulières dans le noyau de ∂_n s'appellent des *cycles* et les éléments dans l'image de ∂_{n+1} des *bords*. L'homologie singulière est donc le groupe des cycles modulo les bords. On notera $[\sigma]$ la classe d'un cycle σ dans $H_n(M, \mathbf{Z})$. Par exemple, un chemin $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$ est un cycle si et seulement si $\sigma(1) - \sigma(0) = 0$, c'est-à-dire, si le point initial et le point final coïncident ; un tel lacet est un bord lorsqu'on peut remplir son intérieur.

Exemple 4.3 (Homologie et composantes connexes). Calculons l'homologie singulière en degré zéro d'un espace topologique M , c'est-à-dire le quotient $C_0(M) / \text{im}(\partial_1)$. Le groupe $C_0(M)$ est engendré par les points de M et deux points $P, Q \in M$ représentent la même classe dans le quotient si et seulement si $P - Q$ est le bord d'une 1-chaîne singulière, autrement dit, s'il existe un chemin $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$ allant de Q à P . Par conséquent, n'importe quels deux points dans la même composante connexe par arcs définissent la même classe d'homologie et

$$H_0(M, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{\pi_0(M)},$$

où $\pi_0(M)$ désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs de M .

Exemple 4.4 (Le plan complexe épointé). Prenons pour M le plan complexe épointé \mathbf{C}^\times . Comme c'est un espace topologique connexe, on a $H_0(M, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ d'après l'exemple précédent. Son premier groupe d'homologie singulière est le quotient $H_1(M, \mathbf{Z}) = \ker(\partial_1) / \text{im}(\partial_2)$ du groupe engendré par les lacets dans \mathbf{C}^\times par ceux qui sont le bord d'une 2-chaîne singulière. Soit $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$ le lacet qui tourne une fois autour de 0 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Comme c'est un lacet simple qui entoure un point qui n'appartient pas à l'espace, σ n'est pas un bord et définit donc une classe non nulle en homologie singulière.



Avec plus de travail, on peut démontrer qu'il s'agit en fait d'un générateur :

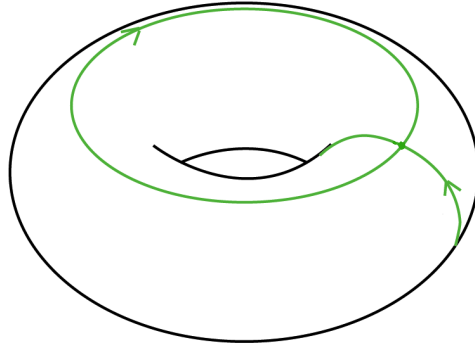
$$H_1(M, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[\sigma].$$

La classe de n'importe quel autre lacet est égale à $n[\sigma]$, où n est le « nombre » de fois que ce lacet tourne autour de 0.

Exemple 4.5 (Les tores complexes). Soit $\Lambda = \mathbf{Z}\lambda_1 \oplus \mathbf{Z}\lambda_2$ le réseau du plan complexe engendré par deux nombres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}^\times$ qui ne sont pas \mathbf{R} -proportionnels, c'est-à-dire, tels que λ_1/λ_2 n'est pas réel. Le groupe Λ agit par translation sur \mathbf{C} et le quotient par cette action libre et proprement discontinue est un tore complexe $M = \mathbf{C}/\Lambda$. Partant du parallélogramme

$$\mathcal{F} = \{x\lambda_1 + y\lambda_2 \mid x, y \in \mathbf{R}, 0 \leq x, y \leq 1\},$$

on obtient M en recollant les côtés opposés. On a $H_0(M, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ car c'est un espace topologique



connexe. L'image dans M des applications $\sigma_i: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$ données par $\sigma_1(t) = t\lambda_1$ et $\sigma_2(t) = t\lambda_2$ sont des lacets qui engendrent l'homologie singulière :

$$H_1(M, \mathbf{C}) = \mathbf{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbf{Z}[\sigma_2].$$

On a aussi $H_2(M, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, correspondant au fait que le tore entoure un trou. On remarquera que, si l'on ôte un point à M , son premier groupe d'homologie reste le même mais le deuxième devient nul : on a dégonflé le tore !

On se placera plus tard dans un cadre où M n'est pas seulement un espace topologique mais une variété différentielle et on voudra intégrer des formes différentielles sur des chaînes singulières. Il ne suffira pas alors de travailler avec des applications continues $\sigma: \Delta^n \rightarrow M$, comme on l'a fait dans ce numéro, mais il faudra imposer des conditions de lissité pour que les intégrales existent, par exemple que σ s'étende en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage ouvert de Δ^n dans \mathbf{R}^{n+1} . On peut démontrer que tous les éléments de $H_n(M, \mathbf{Z})$ admettent un tel représentant. D'ailleurs, en remplaçant \mathbf{Z} par \mathbf{Q} dans tout ce qui précède on aboutit à l'homologie singulière à coefficients rationnels $H_n(M, \mathbf{Q})$, qui est un \mathbf{Q} -espace vectoriel.

4.2. Variétés algébriques affines. Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^n$ l'espace affine de dimension n sur \mathbf{Q} . On va étudier les *variétés algébriques affines* $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^n$ définies par l'annulation d'une famille de polynômes $f_1, \dots, f_m \in \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n]$. Voici ce que l'on entend par ces mots : pour toute \mathbf{Q} -algèbre, autrement dit pour tout anneau commutatif R contenant \mathbf{Q} , on peut

évaluer les f_j dans un point de R^n puisque les seules opérations requises pour ce faire sont la multiplication et l'addition, présentes dans un anneau quelconque, et la multiplication par des éléments de \mathbf{Q} , qui a un sens si $\mathbf{Q} \subset R$. La variété X est alors la collection des ensembles

$$X(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid f_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, m\}$$

lorsque R parcourt toutes les \mathbf{Q} -algèbres. Elle est *algébrique* car les f_j sont des polynômes, par opposition à une variété disons différentielle, où l'on s'autoriserait à prendre des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à la place; elle est *affine* car on cherche les solutions aux équations $f_j = 0$ dans l'espace affine plutôt que dans l'espace projective $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^n$, auquel cas on parlerait de variété projective. Les éléments de $X(R)$ sont appelés *R-points* de X ou points à valeurs dans R .

Définition 4.6. On dit que la variété X est *lisse* si les $m(n+1)$ polynômes

$$f_1, \dots, f_m, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}$$

n'ont pas de racine commune sur une clôture algébrique de \mathbf{Q} .

Comme deux polynômes à coefficients rationnels prennent les mêmes valeurs aux points de $X(R)$ si leur différence est de la forme $f_1 P_1 + \dots + f_m P_m$, pour des $P_i \in \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n]$, il est naturel de définir l'anneau des *fonctions* sur la variété X comme le quotient

$$A = \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n] / (f_1, \dots, f_m)$$

des fonctions sur l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^n$ par l'idéal engendré par les polynômes définissant X .

4.3. Cohomologie de de Rham. On dispose, sur l'anneau des polynômes à n variables, des règles usuelles du calcul différentiel, notamment de l'application \mathbf{Q} -linéaire

$$(4.7) \quad \begin{aligned} d: \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n] dx_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_n] dx_n \\ g &\longmapsto dg = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i \end{aligned}$$

qui envoie un polynôme g vers sa *différentielle*. Rappelons qu'elle satisfait à la règle de Leibniz

$$d(gh) = gdh + hdg.$$

Pour que cette différentielle passe au quotient par l'idéal engendré par les polynômes f_1, \dots, f_m et définisse donc une application sur l'anneau A des fonctions sur X , il faudrait que les relations obtenues en dérivant les f_1, \dots, f_m soient encore valables dans l'espace d'arrivée. On est ainsi amené à définir les *1-formes différentielles* sur la variété affine X comme le A -module

$$\Omega_A^1 = (Adx_1 \oplus \dots \oplus Adx_n) / (df_1, \dots, df_m),$$

c'est-à-dire, comme le quotient du A -module libre de base les éléments dx_1, \dots, dx_n par le sous-module engendré par les différentielles des f_j . Une 1-forme différentielle sur X est ainsi une combinaison linéaire $\omega = \sum_{i \in I} a_i dx_i$, où $I \subset \{1, \dots, n\}$ est un sous-ensemble d'indices et les $a_i \in A$ sont des fonctions sur X . Par construction, la différentielle (4.7) descend en une application que l'on notera encore $d: A \rightarrow \Omega_A^1$.

On peut ensuite définir des formes différentielles de degré supérieur comme suit : pour chaque entier $i \geq 1$, on considère le A -module i -ème produit extérieur $\Omega_A^i = \Lambda^i \Omega_A^1$. Concrètement, Ω_A^i est formé des combinaisons linéaires à coefficients dans A d'éléments

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i, \quad \text{où } \omega_j \in \Omega_A^1 \text{ pour tout } j = 1, \dots, i,$$

et ces combinaisons linéaires sont soumises aux relations de bilinéarité

$$(a\omega_1 + a'\omega_1) \wedge \cdots \wedge \omega_i = a\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i + a'\omega_1' \wedge \cdots \wedge \omega_i \quad \text{pour tous } a, a' \in A,$$

ainsi qu'à la relation $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i = 0$ dès que deux 1-formes différentielles parmi les ω_j sont égales. On appelle *i -formes différentielles* sur X les éléments de Ω_A^i . Par récurrence, la différentielle $d: A \rightarrow \Omega_A^1$ s'étend de manière unique en des applications \mathbf{Q} -linéaires

$$d: \Omega_A^i \longrightarrow \Omega_A^{i+1}$$

telles que $d \circ d = 0$ et que $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ pour tout $\alpha \in \Omega_A^p$. On ainsi construit le *complexe de de Rham algébrique*

$$(4.8) \quad A \xrightarrow{d} \Omega_A^1 \xrightarrow{d} \Omega_A^2 \xrightarrow{d} \dots$$

Il est important de se rappeler que, même si tous les termes dans ce complexe sont des A -modules, les différentielles sont seulement \mathbf{Q} -linéaires et pas A -linéaires au vu de la règle de Leibniz. L'égalité $d \circ d = 0$ implique, comme pour l'homologie singulière, que l'image de chaque différentielle d est un sous-espace vectoriel du noyau de celle d'après.

Définition 4.9. La *cohomologie de de Rham algébrique* en degré $i \geq 0$ de X est le quotient

$$H_{\text{dR}}^i(X) = \frac{\ker(d: \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^{i+1})}{\text{im}(d: \Omega_A^{i-1} \rightarrow \Omega_A^i)},$$

où l'on a posé $\Omega_A^{-1} = 0$ et $\Omega_A^0 = A$ pour avoir des notations uniformes.

Les éléments dans le noyau de la différentielle s'appellent des formes *fermées* et celles dans son image des formes *exactes*, de sorte que la cohomologie de de Rham est l'espace des formes fermées modulo les formes exactes. Remarquons que tous les termes dans le complexe (4.8) sont, à l'exception de l'exemple 4.10 près, des \mathbf{Q} -espaces vectoriels de dimension infinie. On peut cependant démontrer que tous les $H_{\text{dR}}^i(X)$ ont dimension finie.

Exemple 4.10 (Les variétés de dimension zéro). Soit $f \in \mathbf{Q}[x]$ un polynôme irréductible. On considère la variété algébrique affine $X \subset \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^1$ définie par l'annulation de f ; c'est une variété lisse car f n'a pas de racine double. Ses points $X(R)$ à valeurs dans une \mathbf{Q} -algèbre R sont les racines de f dans R et son anneau des fonctions est égal à

$$A = \mathbf{Q}[x]/(f).$$

C'est un corps car l'idéal (f) est maximal et ce corps est une extension finie de \mathbf{Q} : si f a degré d , les fonctions $1, x, \dots, x^{d-1}$ en forment une base sur \mathbf{Q} . Par définition, le A -module des formes différentielles sur X est $\Omega_A^1 = Adx/(df)$. Or, comme $df = f'dx$ et comme f' est inversible dans A , la relation $df = 0$ entraîne $dx = 0$, d'où $\Omega_A^i = 0$ pour tout $i \geq 1$. Le complexe de de Rham est donc réduit à A et sa cohomologie est donc égale à

$$H_{\text{dR}}^0(X) = A$$

vu comme espace vectoriel sur \mathbf{Q} .

Exemple 4.11 (La droite affine époincée). Soit $X \subset \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^2$ le lieu des zéros du polynôme $xy - 1$. L'égalité $xy = 1$ exprime le fait que x est inversible, de sorte que X n'est rien d'autre que la droite affine époincée $\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0\}$, plongée dans le plan affine comme une hyperbole. C'est une variété lisse dont l'anneau des fonctions est l'anneau des polynômes de Laurent

$$A = \mathbf{Q}[x, y]/(xy - 1) \simeq \mathbf{Q}[x, x^{-1}]$$

et le A -module des formes différentielles est

$$\Omega_A^1 = A dx \oplus A dy / (x dy + y dx) \simeq \mathbf{Q}[x, x^{-1}] dx$$

(en effet, la relation $x dy = y dx$ donne $dy = -x^{-2} dx$ et la différentielle dx suffit donc à engendrer Ω_A^1). On en déduit que $\Omega_A^i = 0$ pour tout $i \geq 2$. Le complexe de de Rham algébrique est donc le complexe à deux termes

$$\begin{aligned} d: \mathbf{Q}[x, x^{-1}] dx &\longrightarrow \mathbf{Q}[x, x^{-1}] dx \\ x^n &\longmapsto nx^{n-1} dx \end{aligned}$$

et on doit calculer le noyau et le conoyau de la différentielle :

$$H_{\text{dR}}^0(X) = \ker(d), \quad H_{\text{dR}}^1(X) = \mathbf{Q}[x, x^{-1}] dx / \text{im}(d).$$

La cohomologie en degré zéro est réduite aux fonctions constantes. Quant au premier groupe de cohomologie, l'image de d est l'espace vectoriel engendré par les formes $x^n dx$ pour tout $n \neq -1$; seule la forme différentielle dx/x , dont la primitive n'est pas un polynôme, survit dans le quotient. Par conséquent,

$$H_{\text{dR}}^0(X) = \mathbf{Q}, \quad H_{\text{dR}}^1(X) = \mathbf{Q} \left[\frac{dx}{x} \right].$$

Exemple 4.12 (Cohomologie de de Rham d'une courbe elliptique). Soient a et b deux nombres rationnels et posons $f(x) = x^3 + ax + b$. Considérons le lieu des zéros $X \subset \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^2$ du polynôme $y^2 - f(x)$. Comme ses dérivées partielles sont $2y$ et $-f'$, la variété X est lisse si et seulement si f et f' n'ont pas de zéro commun, c'est-à-dire, si le discriminant de f est non nul. On supposera dorénavant que c'est le cas. En termes des coefficients a et b , cette condition se traduit par $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ et on dit alors que X est une *courbe elliptique affine*; ce qu'on appelle une *courbe elliptique* tout court est le lieu de zéros du polynôme

$$V^2 W - U^3 - a U W^2 - b W^3$$

dans le plan projectif $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^2$ de coordonnées homogènes $[U : V : W]$, qui est obtenu en rajoutant à X le « point à l'infini » $O = [0 : 1 : 0]$. L'anneau de fonctions sur X est égal à

$$A = \mathbf{Q}[x, y]/(y^2 - f(x)) = \mathbf{Q}[x] \oplus \mathbf{Q}[x]y,$$

et le A -module des 1-formes différentielles vaut

$$\Omega_A^1 = (A dx \oplus A dy) / (2y dy - f'(x) dx).$$

On commence par trouver une présentation plus convenable de ce dernier. Comme les polynômes f et f' sont premiers entre eux, par l'identité de Bézout il existe des polynômes

$P, Q \in \mathbf{Q}[x]$ tels que $Pf + Qf' = 1$. Regardons la forme différentielle

$$\omega = Pydx + 2Qdy \in \Omega_A^1.$$

En utilisant les relations $y^2 = f(x)$ dans A et $2ydy = f'(x)dx$ dans Ω_A^1 , on trouve

$$y\omega = Py^2dx + 2yQdy = (Pf + Qf')dx = dx$$

$$f'\omega = Pf'ydx + 2Qf'dy = 2(Py^2 + Qf')dy = 2dy.$$

On a ainsi montré que les générateurs dx et dy de Ω_A^1 s'expriment en termes de ω , et plus précisément que toute 1-forme différentielle s'écrit de manière unique comme $(R + Sy)\omega$, où $R, S \in \mathbf{Q}[x]$. Ceci entraîne en particulier $\Omega_A^i = 0$ pour tout $i \geq 2$, donc le complexe de de Rham est à nouveau formé par les deux termes

$$d: A \longrightarrow \Omega_A^1$$

$$T + Uy \longmapsto d(T + Uy).$$

Il s'agit maintenant de déterminer quels éléments $(R + Sy)\omega \in \Omega_A^1$ ne sont pas de la forme

$$\begin{aligned} d(T + Uy) &= T'dx + U'ydx + Udy \\ &= (T'y + U'y^2 + Uf'/2)\omega \\ &= (U'f + Uf'/2 + T'y)\omega. \end{aligned}$$

On voit d'abord que tous les éléments $Sy\omega$ appartiennent à l'image de d (prendre $U = 0$ et T une primitive de S), puis qu'il en va de même pour tous les $R\omega$ avec R de degré ≥ 2 (si $T = 0$ et $U = x^r$, le polynôme qui multiplie ω a terme dominant $(r + 3/2)x^{r+2}$, donc de degré ≥ 2).

Il s'ensuit que le premier groupe de cohomologie de de Rham de X est le \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension deux engendré par les formes ω et $x\omega$, c'est-à-dire :

$$H_{\text{dR}}^1(X) = \mathbf{Q} \left[\frac{dx}{y} \right] \oplus \mathbf{Q} \left[\frac{xdx}{y} \right].$$

On peut vérifier que, parmi ces formes, ω s'étend en une différentielle sans pôle sur la courbe elliptique complète, tandis que $x\omega$ a un pôle d'ordre 2 à l'infini ; on dit que ω est une différentielle *de première espèce* et que $x\omega$ est une différentielle *deuxième espèce*.

4.4. L'accouplement de périodes. Soit X une variété affine lisse sur \mathbf{Q} comme dans la section précédente. On peut alors regarder l'ensemble des solutions complexes

$$X(\mathbf{C}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n \mid f_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, m\}.$$

Muni de la topologie de sous-espace induite par celle de \mathbf{C}^n , c'est un espace topologique auquel on peut associer des groupes d'homologie singulière comme dans la section 4.1 ; c'est même une variété différentielle. On appelle *homologie de Betti* de X , et on le note $H_n^{\text{B}}(X)$, le \mathbf{Q} -espace vectoriel $H_n(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$. Rappelons que tous ses éléments admettent pour représentants des n -chaînes lisses $\sigma: \Delta^n \rightarrow X(\mathbf{C})$ le long desquelles on peut intégrer des formes différentielles :

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^n} \sigma^* \omega.$$

Il résulte de la formule de Stokes que la valeur de cette intégrale ne dépend de σ et de ω qu'à travers leurs classes en homologie et en cohomologie. En effet, si l'on remplace la forme

différentielle ω et le cycle σ par d'autres représentants $\omega + d\eta$ et $\sigma + \partial\tau$ des mêmes classes, l'intégrale ne change pas puisque

$$\begin{aligned} \int_{\sigma+\partial\tau} (\omega + d\eta) &= \int_{\sigma} \omega + \int_{\sigma} d\eta + \int_{\partial\tau} \omega + \int_{\partial\tau} d\eta \\ &= \int_{\sigma} \omega + \int_{\partial\sigma} \eta + \int_{\tau} d\omega + \int_{\partial^2\tau} \eta \\ &= \int_{\sigma} \omega. \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité on a utilisé trois fois la formule de Stokes et la troisième découle des annulations $\partial\sigma = 0$ (car σ est un cycle), $d\omega = 0$ (car ω est exacte) et $\partial^2 = 0$.

Théorème 4.13 (de Rham, Grothendieck). *L'intégration induit un accouplement parfait*

$$(4.14) \quad \begin{aligned} H_{\text{dR}}^n(X) \times H_n^{\text{B}}(X) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ ([\omega], [\sigma]) &\longmapsto \int_{\sigma} \omega. \end{aligned}$$

Rappelons que « parfait » signifie que les \mathbf{Q} -espaces vectoriels $H_{\text{dR}}^n(X)$ et $H_n^{\text{B}}(X)$ ont même dimension et que la matrice de l'accouplement

$$\left(\int_{\sigma_j} \omega_i \right)$$

dans n'importe quelle base $\{[\omega_i]\}$ de $H_{\text{dR}}^n(X)$ et n'importe quelle base $\{[\sigma_j]\}$ de $H_n^{\text{B}}(X)$ est inversible; on l'appelle la *matrice des périodes*. Un tel accouplement permet d'identifier l'espace vectoriel complexe $H_{\text{dR}}^n(X) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ aux applications \mathbf{Q} -linéaires $\text{Hom}(H_n^{\text{B}}(X), \mathbf{C})$. C'est ce dernier espace vectoriel qu'on appelle la *cohomologie de Betti* à coefficients complexes.

Comme l'attribution le suggère, le théorème 4.13 combine deux résultats : le premier est le théorème classique, dû à de Rham, affirmant que l'intégration fournit un accouplement parfait entre l'homologie de Betti et la cohomologie de de Rham *analytique* de la variété différentielle $X(\mathbf{C})$, c'est-à-dire, celle où les coefficients des formes différentielles ne sont pas des polynômes mais des fonctions de classe \mathcal{C}^{∞} . Le deuxième est un théorème de Grothendieck [10] d'après lequel la cohomologie de de Rham analytique coïncide avec la cohomologie de de Rham algébrique telle qu'on l'a définie dans ces notes.

Exemple 4.15 (Retour aux nombres algébriques). Pour $n = 0$, l'accouplement de périodes associe à la classe d'une fonction f sur la variété X et à la classe d'un point complexe $P \in X(\mathbf{C})$ la valeur $f(P) \in \mathbf{C}$. Le résultat est particulièrement intéressant lorsque $X \subset \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^1$ est le lieu des zéros d'un polynôme irréductible $f \in \mathbf{Q}[x]$ de degré d . D'un côté, la cohomologie de de Rham algébrique de X est égale à

$$H_{\text{dR}}^0(X) = \mathbf{Q}[x]/(f) = \mathbf{Q}\langle 1, x, \dots, x^{d-1} \rangle,$$

comme on l'a vu dans l'exemple 4.10. D'un autre côté, $X(\mathbf{C})$ est l'ensemble fini $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ formé des d racines distinctes de f , de sorte que l'homologie de Betti $H_0^{\text{B}}(X)$ est le \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension d engendré par les classes de ces points. On voit déjà que les deux

espaces vectoriels ont même dimension. La matrice de l'accouplement de périodes par rapport à ces bases est composée des valeurs des fonctions $1, x, \dots, x^{d-1}$ aux points $\alpha_1, \dots, \alpha_d$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{d-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \cdots & \alpha_d^{d-1} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice de Vandermonde, de déterminant $\prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_j - \alpha_i)$. Comme le carré de ce dernier coïncide (à normalisation près) avec le discriminant du polynôme f , qui est non nul par l'hypothèse que f est irréductible, il s'agit bien d'un accouplement parfait. Les nombres algébriques sont donc les périodes des variétés de dimension zéro sur \mathbf{Q} ; ils ne se montrent pas tous seuls mais toujours en compagnie de leurs *conjugués* !

Exemple 4.16 (Le nombre π). Considérons la droite affine épointée $X = \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0\}$. Comme on l'a vu dans l'exemple 4.11, sa cohomologie de de Rham algébrique $H_{\text{dR}}^1(X)$ est le \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension un engendré par la classe de la forme différentielle dx/x . D'ailleurs, l'espace des points complexes est le plan complexe épointé $X(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$, dont le premier groupe d'homologie de Betti $H_1^{\text{B}}(X)$ est, d'après l'exemple 4.4, le \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension un engendré par le lacet σ qui tourne une fois autour de zéro au sens antihoraire. Par rapport à ces bases, la matrice de périodes a pour seul coefficient le nombre

$$\int_{\sigma} \frac{dx}{x} = 2\pi i$$

qui est transcendant d'après le théorème de Lindemann (1882). Ceci illustre le fait que, bien que la cohomologie de de Rham et l'homologie de Betti soient des \mathbf{Q} -espaces vectoriels, l'accouplement de périodes ne prend pas de valeurs rationnelles, ni même algébriques.

Exemple 4.17 (Les intégrales elliptiques). Soit $X \subset \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^2$ la courbe elliptique affine d'équation

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Le premier groupe de cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^1(X)$ est, d'après l'exemple 4.12, le \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension deux engendré par les classes des formes différentielles $\omega_1 = dx/y$ et $\omega_2 = xdx/y$, dont seule la première s'étend en une différentielle sans pôle sur la courbe elliptique complète $E \subset \mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^2$. Ceci signifie que E est une courbe projective lisse de *genre* un [14]. D'après le théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann, pour lequel on renvoie au beau livre collectif [8], le revêtement universel de

$$E(\mathbf{C}) = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid y^2 = x^3 + ax + b\} \cup O$$

est le plan complexe \mathbf{C} et on récupère $E(\mathbf{C})$ comme le quotient par un réseau $\Lambda = \mathbf{Z}\lambda_1 \oplus \mathbf{Z}\lambda_2$. Le premier groupe d'homologie de Betti de $H_1^{\text{B}}(E)$ est par conséquent le \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par les lacets σ_1 et σ_2 de l'exemple 4.5 et on trouve la matrice de périodes

$$\begin{pmatrix} \int_{\sigma_1} \frac{dx}{y} & \int_{\sigma_1} \frac{xdx}{y} \\ \int_{\sigma_2} \frac{dx}{y} & \int_{\sigma_2} \frac{xdx}{y} \end{pmatrix}.$$

Le réseau Λ ci-dessus est étroitement lié aux périodes de la courbe elliptique. En effet, étant donné un point $P \in E(\mathbf{C})$, on peut considérer l'intégrale $\int_0^P dx/y \in \mathbf{C}$ de la forme différentielle de première espèce le long d'un chemin γ joignant le point à l'infini O et P . Si γ' est un autre tel chemin, la différence $\gamma' - \gamma$ est une 1-chaîne singulière sans bord dans $E(\mathbf{C})$ et définit donc une classe en homologie singulière $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Or, ce groupe étant libre de base σ_1 et σ_2 , il existe des entiers $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $[\gamma' - \gamma] = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2$. Compte tenu de l'égalité

$$\int_{\gamma'} \frac{dx}{y} = \int_{\gamma} \frac{dx}{y} + n_1 \int_{\sigma_1} \frac{dx}{y} + n_2 \int_{\sigma_2} \frac{dx}{y},$$

pour un autre choix de chemin allant de O à P la valeur de l'intégrale change par un élément du réseau $\Lambda = \mathbf{Z}(\int_{\sigma_1} dx/y) \oplus \mathbf{Z}(\int_{\sigma_2} dx/y)$. L'application

$$\begin{aligned} E(\mathbf{C}) &\longrightarrow \mathbf{C}/\Lambda \\ P &\longmapsto \int_0^P \frac{dx}{y} \pmod{\Lambda} \end{aligned}$$

est donc bien définie et il s'agit en fait d'un isomorphisme. Toute fonction méromorphe sur le tore $E(\mathbf{C})$ se relève en une fonction doublement périodique sur \mathbf{C} de périodes $\int_{\sigma_i} dx/y$.

Pour construire l'application inverse, on commence par associer à un réseau Λ de \mathbf{C} sa fonction \mathcal{P} de Weierstrass, définie par la série

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z + \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

On vérifie ensuite que \mathcal{P} et sa dérivée \mathcal{P}' sont reliées par l'équation algébrique

$$(\mathcal{P}')^2 = 4(\mathcal{P})^3 - 60g_2(\Lambda)\mathcal{P} - 140g_3(\Lambda),$$

dont les coefficients sont les nombres complexes

$$g_2(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^4}, \quad g_3(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}.$$

On en déduit une application

$$\begin{aligned} \mathbf{C}/\Lambda &\longrightarrow \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - 60g_2(\Lambda)x - 140g_3(\Lambda)\} \cup O \\ z \pmod{\Lambda} &\longmapsto \begin{cases} (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z)) & z \neq 0 \\ O & z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Notons que l'image inverse de la différentielle de première espèce par cette application n'est rien d'autre que $d(\mathcal{P}(z))/\mathcal{P}'(z) = dz$. En intégrant une primitive de \mathcal{P} sur un contour convenable, on trouve la *relation de Legendre*

$$\det \begin{pmatrix} \int_{\sigma_1} \frac{dx}{y} & \int_{\sigma_1} \frac{x dx}{y} \\ \int_{\sigma_2} \frac{dx}{y} & \int_{\sigma_1} \frac{x dx}{y} \end{pmatrix} = \pm 2\pi i,$$

qui permet de voir que l'accouplement de périodes est parfait dans le cas qui nous occupe.

4.5. Une variante : cohomologie relative. L'homologie singulière, telle qu'on l'a définie ci-dessus, ne prend compte que des cycles sans bord, par exemple, les lacets. Or, dans la définition de période on s'autorise également à intégrer sur des chemins qui joignent deux points distincts : c'est le cas des logarithmes $\log(q)$, obtenus comme l'intégrale de la forme différentielle dx/x sur le chemin allant de 1 à q . Pour pouvoir traiter cette situation aussi, on introduit une variante *relative* de l'homologie singulière et de la cohomologie de de Rham.

Soient M un espace topologique et $\iota: N \hookrightarrow M$ l'inclusion d'un sous-espace. En regardant une chaîne singulière à valeurs dans N comme une chaîne singulière sur l'espace plus grand M , on obtient des applications injectives $\iota_*: C_n(N) \rightarrow C_n(M)$ pour tout entier $n \geq 0$. Elles commutent avec les applications bord, donnant ainsi lieu à un *complexe double*

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \partial_2 \downarrow & & \partial_2 \downarrow \\ C_1(N) & \xrightarrow{\iota_*} & C_1(M) \\ \partial_1 \downarrow & & \partial_1 \downarrow \\ C_0(N) & \xrightarrow{\iota_*} & C_0(M) \end{array}$$

On peut ensuite le transformer en un complexe simple en considérant les applications

$$\begin{aligned} \delta_n: C_{n-1}(N) \oplus C_n(M) &\longrightarrow C_{n-2}(N) \oplus C_{n-1}(M) \\ (a, b) &\longmapsto (-\partial_{n-1}(a), \partial_n(b) - \iota_*(a)) \end{aligned}$$

et définir l'homologie singulière de M relative à N comme

$$H_n(M, N; \mathbf{Z}) = \ker(\delta_n) / \text{im}(\delta_{n+1}).$$

Les éléments de ce groupe sont représentés par des n -chaînes singulières σ dont le bord ne s'annule pas nécessairement mais est soumis à la contrainte qu'il est contenu dans N . Par exemple, on a dans $H_1(M, N; \mathbf{Z})$ le droit de considérer des chemins qui ne sont pas des lacets mais il faut alors que les points initiaux et finaux appartiennent au sous-espace $N \subset M$.

On dispose d'une construction similaire en cohomologie de de Rham. Soit $X \subset \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^n$ une variété affine lisse définie par l'annulation des polynômes f_1, \dots, f_m et soit Z une autre variété lisse définie par les mêmes équations plus d'autres ; on dit alors que Z est une sous-variété de X et on note $\iota: Z \hookrightarrow X$ l'inclusion. Si A et B désignent les anneaux de fonctions sur X et sur Z respectivement, on a des applications de restriction $\iota^*: A \rightarrow B$ et $\iota^*: \Omega_A^i \rightarrow \Omega_B^i$ pour tout $i \geq 1$, que l'on combine mutatis mutandis dans un complexe

$$A \longrightarrow \Omega_A^1 \oplus B \longrightarrow \Omega_A^2 \oplus \Omega_B^1 \longrightarrow \dots$$

La cohomologie de de Rham relative $H_{\text{dR}}^n(X, Z)$ est le quotient du noyau de la flèche en degré n par le conoyau de celle d'avant et l'accouplement (4.14) s'étend en un accouplement parfait

$$(4.18) \quad H_{\text{dR}}^n(X, Z) \times H_n^{\text{B}}(X, Z) \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Cette extension de la cohomologie n'est toujours pas suffisante pour engendrer toutes les périodes de Kontsevich–Zagier, mais on n'en est pas loin ! Si l'on s'autorise à prendre pour Z

une sous-variété à *croisements normaux*, c'est-à-dire, une réunion de sous-variétés lisses Z_i qui s'intersectent les unes avec les autres comme les hyperplans coordonnées dans l'espace affine, on peut démontrer que les nombres complexes qui apparaissent comme coefficients de l'accouplement (4.18) sont exactement les périodes de Kontsevich–Zagier [11].

Exemple 4.19 (Logarithmes). Soit $q > 1$ un nombre rationnel. On considère la droite épointée $X = \mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0\}$ de l'exemple 4.11 et la sous-variété $Z \subset X$ formée par les deux points 1 et q , autrement dit, le lieu de zéros du polynôme $(x-1)(x-q)$ dans $\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^1$. C'est une sous-variété lisse d'anneau de fonctions

$$B = \mathbf{Q}[x]/(x-1)(x-q) = \mathbf{Q}[x]/(x-1) \oplus \mathbf{Q}[x]/(x-q) = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}.$$

Le complexe de de Rham relative est donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}[x, x^{-1}]dx & & \\ \uparrow d & & \\ \mathbf{Q}[x, x^{-1}] & \longrightarrow & \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}, \end{array}$$

où la flèche verticale est la différentielle, comme dans l'exemple 4.11, et la flèche horizontale envoie un polynôme de Laurent $g \in \mathbf{Q}[x, x^{-1}]$ sur la paire $(g(1), g(q)) \in \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ des valeurs qu'il prend aux points 1 et q . Le complexe total est alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}[x, x^{-1}] & \longrightarrow & \mathbf{Q}[x, x^{-1}]dx \oplus \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q} \\ g & \longmapsto & (g'(x)dx, g(1), g(q)) \end{array}$$

et il faut calculer le noyau et le conoyau de cette flèche. Si g est dans le noyau, on a $g'(x) = 0$, donc g est constante, mais comme cette constante doit être égale à $g(1) = g(q) = 0$, la seule possibilité est $g = 0$; par conséquent, $H_{\text{dR}}^0(X, Z) = 0$. En travaillant un peu plus, on voit ensuite que le conoyau est engendré par les classes des éléments $(dx/(q-1), 0, 0)$ et $(dx/x, 0, 0)$ dans $\mathbf{Q}[x, x^{-1}]dx \oplus \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$, d'où :

$$H_{\text{dR}}^1(X, Z) = \mathbf{Q} \left[\frac{dx}{q-1} \right] \oplus \mathbf{Q} \left[\frac{dx}{x} \right].$$

D'ailleurs, l'homologie relative $H_1^{\text{B}}(X, Z)$ est engendrée par le lacet σ_1 qui tourne une fois autour de zéro, comme dans l'exemple 4.4, et par le chemin droit σ_0 allant de 1 à q (c'est pour pouvoir considérer ce dernier qu'on a introduit la variante relative). La matrice de l'accouplement de périodes par rapport à ces bases est donnée par

$$(4.20) \quad \begin{array}{c|cc} \int & \frac{1}{q-1}dx & \frac{dx}{x} \\ \sigma_0 & 1 & \log(q) \\ \sigma_1 & 0 & 2\pi i \end{array}$$

On voit que c'est un accouplement parfait car le déterminant vaut $2\pi i$. Cette matrice reflète le fait bien connu que le logarithme est une fonction *multiforme* : pour obtenir un nombre complexe bien déterminé, on n'a pas défini $\log(q)$ comme fonction de q , mais plutôt comme

fonction d'un chemin γ allant de 1 vers q , à savoir

$$\gamma \mapsto \int_{\gamma} \frac{dx}{x}.$$

Quand $q > 1$, un choix standard consiste à prendre la ligne droite σ_0 entre 1 et q , mais on aurait pu aussi bien choisir n'importe quel autre chemin γ . Comme celui-ci définit une classe d'homologie singulière $H_1(\mathbf{C}^\times, \mathbf{Z})$ et comme les classes de σ_0 et σ_1 en forment une base, on a $[\gamma] = [\sigma_0] + a[\sigma_1]$, où a est le nombre de fois où γ tourne autour de 0. On trouve alors

$$\int_{\gamma} \frac{dx}{x} = \int_{\sigma_0} \frac{dx}{x} + a \int_{\sigma_1} \frac{dx}{x} = \log(q) + a2\pi i,$$

où l'on voit apparaître la *monodromie* du logarithme.

5. VERS UNE THÉORIE DE GALOIS POUR LES NOMBRES TRANSCENDANTS

Si l'on se donne une période par une représentation intégrale à la Kontsevich–Zagier, la première étape pour l'étudier consiste à trouver une variété algébrique X telle que la matrice de l'accouplement entre un groupe de cohomologie de de Rham et un groupe d'homologie de Betti de X , éventuellement relatives à une sous-variété, contienne la période en question parmi ses coefficients. Ces espaces vectoriels étant rarement de dimension un, on trouve d'autres périodes chemin faisant ; pour les nombres algébriques, on a vu que c'étaient leurs conjugués au sens de la théorie de Galois. Par le biais de la théorie des motifs, on peut associer aux périodes des *groupes de Galois motiviques* qui conjecturalement permutent ces nombres en respectant toutes leurs relations algébriques. On aura affaire à des nombres transcendants, et on doit donc s'attendre à ce que ces groupes ne soient pas finis mais plutôt des groupes de matrices définis par des équations polynomiales, ce qu'on appelle des *groupe algébriques*. En fait, leur dimension est déjà censée être un invariant très riche, si l'on croit à cette conjecture de Grothendieck qui est, à peu de choses près, équivalente à celle de Kontsevich–Zagier :

Conjecture 5.1 (Grothendieck). *Soit X une variété algébrique affine lisse. Le degré de transcendance du corps engendré par les coefficients de l'accouplement de périodes est égal à la dimension du groupe de Galois motivique.*

Il y a des cas où l'on dispose des heuristiques pour deviner les conjugués d'une période. Par exemple, bien que le nombre π ne soit racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels, il est racine du polynôme de degré infini

$$\prod_{n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots \in \mathbf{Q}[[x]],$$

ce qui suggère que les conjugués de π devraient être ses multiples non nuls. En effet, comme la cohomologie de $\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0\}$ est de dimension un, le groupe de Galois de π est un sous-groupe de \mathbb{G}_m . Hormis \mathbb{G}_m lui-même, les sous-groupes de \mathbb{G}_m sont les racines de l'unité d'un certain ordre. Or, si le groupe de Galois était un groupe fini, on obtiendrait une relation polynomiale satisfaite par $2\pi i$, ce qui n'est pas possible car c'est un nombre transcendant. On en déduit que le groupe est \mathbb{G}_m , un \mathbf{Q} -point $g \in \mathbb{G}_m(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^\times$ agissant par $g \cdot (2\pi i) = g(2\pi i)$.

Dans le cas des logarithmes, la cohomologie est de dimension deux et le groupe de Galois de $\log(q)$ est donc un sous-groupe de GL_2 . Le fait que la matrice des périodes (4.20) soit triangulaire supérieure avec un nombre rationnel (qui a groupe de Galois trivial) et le nombre π (dont le groupe de Galois est \mathbb{G}_m) dans la diagonale impose la contrainte que ses éléments sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. On remarque ensuite qu'il n'y a que deux tels groupes : ou bien $a = 0$ ou bien a prend n'importe quelle valeur. Le premier cas voudrait dire que $\log(q)$ peut s'écrire comme une combinaison \mathbf{Q} -linéaire de 1 et $2\pi i$, de sorte que la matrice de périodes deviendrait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\pi i \end{pmatrix}$ après changement de base. Or, comme $\log(q)$ est réel et irrationnel, ceci n'est pas possible. On déduit que le groupe de Galois est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, qui devraient agir sur $\log(q)$ par la formule

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \log(q) = b \log(q) + a(2\pi i).$$

On renvoie aux textes d'Yves André [1, 2, 3] pour plus d'information sur ce sujet.

RÉFÉRENCES

1. Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.
2. Y. André, *Galois theory beyond algebraic numbers and algebraic functions*, Colloquium De Giorgi 2010-2012, Colloquia, vol. 4, Ed. Norm., Pisa, 2013, pp. 1–7.
3. ———, *Groupes de Galois motiviques et périodes*, Astérisque (2017), no. 390, Exp. No. 1104, 1–26, Séminaire Bourbaki. Vol. 2015/2016. Exposés 1104–1119.
4. T. M. Apostol, *A proof that Euler missed : Evaluating $\zeta(2)$ the easy way*, Math. Intelligencer **5** (1983), 59–60.
5. J. Ayoub, *La version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich–Zagier revisitée*, Tohoku Math. J., à paraître.
6. ———, *Periods and the conjectures of Grothendieck and Kontsevich–Zagier*, Eur. Math. Soc. Newsl. **91** (2014), 12–18.
7. ———, *Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich–Zagier*, Ann. of Math. **181** (2015), no. 3, 905–922.
8. Henri Paul de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann*, ENS Éditions, Lyon, 2010, Retour sur un théorème centenaire.
9. J. Fresán and P. Jossen, *Exponential motives*.
10. A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 29, 95–103.
11. A. Huber and S. Müller-Stach, *Periods and Nori motives*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 65, Springer, Cham, 2017, With contributions of Benjamin Friedrich and Jonas von Wangenheim.
12. A. Huber and G. Wüstholz, *Transcendence and linear relations of 1-periods*, <https://arxiv.org/pdf/1805.10104.pdf>.
13. M. Kontsevich and D. Zagier, *Periods*, Mathematics unlimited—2001 and beyond, Springer, Berlin, 2001, pp. 771–808.
14. P. Popescu-Pampu, *Qu'est-ce que le genre ?*, Histoire de mathématiques, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2012, pp. 55–195.
15. M. Waldschmidt, *Transcendence of periods : the state of the art*, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), no. 2, 435–463.

CMLS, ÉCOLE POLYTECHNIQUE, F-91128 PALAISEAU CEDEX, FRANCE

E-mail address: javier.fresan@polytechnique.edu