

① MOTIVATION : conjecture de Birch
Swinerton-Dyer 1965

$$E \quad y^2 = x^3 + \textcircled{a}x + \textcircled{b}$$

entiers tels que
 $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$

L'ensemble des solutions rationnelles

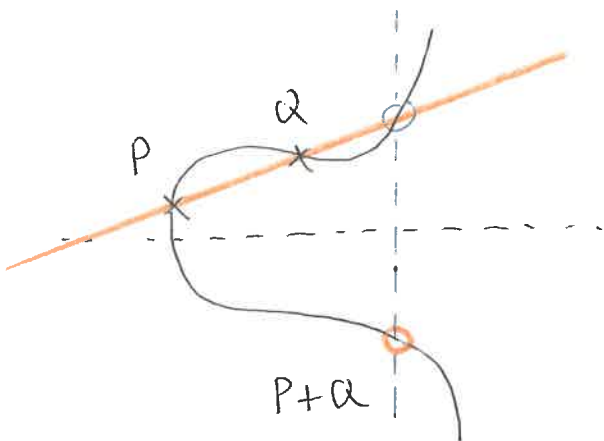
$$E(\mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \textcircled{0}$$

↑
ajouter un point
à l'infini

est muni d'une loi de groupe et c'est un

théorème de Mordell (1922)

que c'est un groupe de
côté fini



$$E(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}^{\text{rang } E} \times (\text{groupe fini})$$

La conjecture prédit $\text{rang } E$ en termes
de la fonction $L(E, s)$.

Pour p premier, ne divisent pas Δ ,

$$E(\mathbb{F}_p) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2 \mid y^2 = x^3 + \bar{a}x + \bar{b}\} \cup \textcircled{0}$$

et le nombre d'éléments de cet ensemble fini s'écrit

$$|E(\mathbb{F}_p)| = 1 - a_p + p$$

Théorème de Hasse (1933) $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$

« conjecture de Weil pour les courbes elliptiques »

On peut alors former le produit infini

$$L(E, s) = \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}$$

qui définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1 + \frac{1}{2}$.

Théorème de Wiles (1993) $L(E, s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur tout le plan complexe. En particulier, on peut parler de sa valeur en $s=1$.

Conjecture (Birch - Swinnerton-Dyer)

$$\operatorname{rang} E(\mathbb{Q}) \stackrel{?}{=} \operatorname{ord}_{s=1} L(E, s)$$

Conjecture de Sato-Tate

[Clozel-Harris-Shepherd-Barr-Taylor 2008]

Supposons que E n'a pas multiplication complexe. Pour tout $[a, b] \subseteq [-2, 2]$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\{p \leq X \mid \frac{a_p}{\sqrt{p}} \in [a, b]\}|}{|\{p \leq X\}|} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \sqrt{4-t^2} dt$$