El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Fresán

Funciones E: ¿qué tiene que ver la trascendencia con los modos de vibración de un tambor?

por

Javier Fresán

1. Del teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass a la hipótesis de Bourget

Gracias a uno de los teoremas más bellos de la teoría de números, sabemos desde hace casi 150 años cuáles son todas las relaciones polinomiales entre los valores que toma la función exponencial en argumentos algebraicos.

Teorema 1.1 (Hermite–Lindemann–Weierstrass). *Sean $r \geq 1$ un entero y $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Las exponenciales*

$$e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_r}$$

son algebraicamente independientes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Recordemos que ser *algebraicamente independientes* sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ significa que el único polinomio $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$ que cumple

$$P(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_r}) = 0 \tag{1.1}$$

es el polinomio idénticamente cero. En el caso $r = 1$, es decir, cuando hay un único número algebraico α, la hipótesis de ser linealmente independiente equivale a pedir que α sea distinto de cero, y el teorema dice que e^{α} no es raíz de ningún polinomio no nulo con coeficientes algebraicos, es decir, que es un número *trascendente*. Este enunciado incluye como casos particulares la trascendencia de las que quizá sean las dos constantes más famosas de las matemáticas: los números

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{y} \quad \pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

cuya definición escribo así para enfatizar que π es el volumen del conjunto semialgebraico $x^2 + y^2 \leq 1$, un ejemplo paradigmático de *período* según Kontsevich y Zagier [15], mientras que e se obtiene como la suma de una serie infinita. Para ver que e es trascendente, basta con tomar $\alpha = 1$, mientras que para π utilizamos el siguiente truco: si π fuese algebraico, también lo sería $2\pi i$, pero entonces la identidad $e^{2\pi i} = 1$ daría lugar a una contradicción con el teorema. En general, cualquier determinación no nula del logaritmo de un número algebraico no nulo es trascendente, en vista de la igualdad $e^{\log \alpha} = \alpha$. Por ejemplo, el número $\log 2 = 0{,}693147...$ es trascendente. Hermite demostró la trascendencia de e^α cuando α es un número racional no nulo en cuatro notas [14] publicadas en los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* en 1873. Hubo que esperar casi diez años hasta que Lindemann [16] consiguió adaptar sus ideas para tratar el caso de un número algebraico general y deducir así la trascendencia de π. Con técnicas similares, Lindemann demuestra en una secuela publicada el mismo año [17] una version débil del teorema 1.1 (en realidad del enunciado equivalente que indicamos más abajo): la independencia lineal sobre $\mathbb{Q}$ en lugar de $\overline{\mathbb{Q}}$. La primera demostración completa se debe a Weierstrass [21].

La hipótesis de que los números algebraicos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sean linealmente independientes es obviamente necesaria: si existe una relación lineal no trivial con coeficientes racionales, después de multiplicar por un denominador común existe también una con coeficientes enteros, que separando los coeficientes positivos de los negativos a los dos lados de la igualdad podemos escribir como

$$n_1\alpha_1 + \cdots + n_s\alpha_s = n_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + n_r\alpha_r,$$

donde los $n_i \geq 0$ son enteros no todos nulos. Utilizando la propiedad

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$$

de la función exponencial, deducimos entonces que (1.1) se cumple para el polinomio no nulo $P = X_1^{n_1} \cdots X_s^{n_s} - X_{s+1}^{n_{s+1}} \cdots X_r^{n_r}$, es decir, que los números $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_r}$ no son algebraicamente independientes. La implicación interesante es la recíproca: *todas* las relaciones algebraicas entre $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_r}$ se obtienen de este modo.

La demostración del teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass reposa de manera esencial sobre la identidad $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$, que permite reducir el estudio de las relaciones polinomiales al de las relaciones lineales, siempre más fáciles de entender. Gracias a ello, el teorema resulta de hecho ser equivalente al siguiente enunciado:

Teorema 1.2 (Hermite–Lindemann–Weierstrass). *Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ números algebraicos distintos. Entonces $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_r}$ son linealmente independientes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Volveremos a él en la sección 4. Dado el uso crucial de la aditividad de la exponencial, no estaba nada claro cómo generalizar las ideas de la demostración para obtener resultados de trascendencia para los valores de otras funciones especiales. Un caso particularmente interesante era el de las *funciones de Bessel*

$$J_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k} \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{1.2}$$

que, entre muchos otros lugares, aparecen en la física matemática cuando se estudian los modos de vibración de un tambor. Sin entrar en muchos detalles, la función $u(x, y, t)$ que a un punto del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ y a un tiempo t asocia su altura (positiva o negativa) al hacerlo vibrar es solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{si } x^2 + y^2 < 1$$

con la condición de frontera $u(x, y, t) = 0$ si $x^2 + y^2 = 1$, que traduce el hecho de que el borde del tambor permanece fijo. Aquí c es una constante que depende de la física del tambor y que no tendrá mucha importancia para nosotros.

La simetría del círculo hace que sea más conveniente trabajar en coordenadas polares (r, θ, t). Si buscamos soluciones con las variables separadas

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t),$$

vemos primero que T tiene que ser de la forma $T(t) = A\cos(c\lambda t) + B\sin(c\lambda t)$ y luego que $\Theta(\theta) = C\cos(k\theta) + D\sin(k\theta)$ para $k = 0, 1, \ldots$ El caso $k = 0$ ocurre cuando golpeamos en el centro del tambor y la solución no depende del ángulo θ. Finalmente, la componente radial R cumple la ecuación diferencial de Bessel

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - k^2)R(r) = 0.$$

En términos de las funciones de Bessel (1.2), una solución se escribe

$$R(r) = J_k(\lambda r),$$

y la condición de frontera implica $J_k(\lambda) = 0$, es decir, las frecuencias λ son ceros de la función de Bessel. El entero k se suele llamar el *orden* de la función de Bessel. Si $k \geq 1$, es obvio a partir de la definición que $J_k(z)$ se anula en $z = 0$. Tras desarrollar los cálculos que acabamos de esbozar, Bourget [8] conjeturó en su memoria sobre el movimiento vibratorio de las membranas circulares de 1866 una especie de fenómeno de no resonancia: que dos funciones de Bessel de distintos órdenes $J_k(z)$ y $J_\ell(z)$ no tienen ningún cero en común salvo quizá $z = 0$, un enunciado que empezó a popularizarse bajo el nombre de *hipótesis de Bourget*.

La hipótesis es cierta para dos funciones de Bessel de órdenes consecutivos. En efecto, derivando término a término la serie de potencias de $J_k(z)$ vemos que

$$J_k'(z) = \frac{k}{z} J_k(z) - J_{k+1}(z),$$

y de ahí se deduce que si $J_k(z)$ y $J_{k+1}(z)$ tienen un cero común no nulo $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, entonces la derivada de $J_k(z)$ también se anula en α, pero esto no puede ocurrir para una solución de una ecuación diferencial de orden 2 como

$$z^2 J_k''(z) + zJ_k'(z) + (z^2 - k^2)J_k(z) = 0,$$

cuya única singularidad es $z = 0$ (por ejemplo, el teorema de Cauchy dice que alrededor de cada $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ el espacio de soluciones holomorfas es de dimensión 2, y que una solución está determinada de forma única por su valor y el de su derivada).

En general, dos funciones de Bessel de distintos órdenes están relacionadas entre sí por una recurrencia de la forma

$$J_{m+k}(z) = J_k(z)R_{m,k}(z) - J_{k-1}(z)R_{m-1,k+1}(z), \tag{1.3}$$

donde $R_{k,m} \in \mathbb{Q}[z^{-1}]$ son ciertos polinomios con coeficientes racionales en la variable $1/z$ llamados *polinomios de Lommel* y que se pueden calcular explícitamente:

$$R_{m,k} = \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^n (m-n)!(k+m-n-1)!}{n!(m-2n)!(k+n-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m}.$$

Independientemente del valor exacto de estos polinomios, una de las consecuencias de la igualdad (1.3) es que si $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ es un cero común no nulo de dos funciones de Bessel de distintos órdenes, entonces α es un número algebraico. En efecto, si tanto $J_{m+k}(\alpha)$ como $J_k(\alpha)$ se anulan, de la relación de recurrencia deducimos que también lo hace el producto $J_{k-1}(\alpha)R_{m-1,k+1}(\alpha)$ y, como ya hemos visto que el primer factor es distinto de cero, la igualdad $R_{m-1,k+1}(\alpha) = 0$ implica que α es un número algebraico. Concluimos así que la hipótesis de Bourget sería una consecuencia de un resultado que dijera que las funciones de Bessel toman valores trascendentes en todo argumento algebraico distinto de cero, ¡igual que la función exponencial!

2. La definición de función E

En una memoria [19] sobre las aplicaciones de la aproximación diofántica publicada en 1929 y que pronto iba a cambiar la historia de la teoría de números, Siegel introduce una clase de funciones cuyos valores en argumentos algebraicos se propone estudiar con el objetivo de demostrar que $J_k(\alpha)$ es trascendente.

Definición 2.1 (Siegel, 1929). Una *función E* es una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$$

que cumple las siguientes propiedades:

(a) f es solución de una ecuación diferencial lineal ordinaria

$$c_r(z)f^{(r)}(z) + \cdots + c_1(z)f'(z) + c_0(z)f(z) = 0, \tag{2.1}$$

donde los $c_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ son polinomios no todos nulos;

(b) existe un número real $C > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$,

$$\max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(a_n)| \leq C^n \quad \text{y} \quad \mathrm{den}(a_1, \ldots, a_n) \leq C^n,$$

donde $\mathrm{den}(a_1, \ldots, a_n)$ designa el «denominador común» de $a_1, \ldots, a_n$, es decir, el menor entero $d_n \geq 1$ tal que $d_n a_1, \ldots, d_n a_n$ son enteros algebraicos.

A veces, en lugar de escribir la ecuación diferencial como en (2.1), utilizaremos el lenguaje de los *operadores diferenciales* y diremos que

$$L = c_r(z)(d/dz)^r + \cdots + c_1(z)(d/dz) + c_0(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\langle z, d/dz\rangle$$

anula la serie $f(z)$. Si el coeficiente dominante c_r es distinto del polinomio idénticamente cero, L es un operador diferencial de orden r. Diremos que una función E es de *orden diferencial* r si r es el mínimo orden de un operador diferencial distinto de cero que la anula. Última definición por el momento: las *singularidades* de L en el plano complejo son las raíces del polinomio $c_r(z)$. Digo «en el plano complejo» porque en general se incluye también el infinito como singularidad. En el anillo de operadores diferenciales $\overline{\mathbb{Q}}\langle z, d/dz\rangle$, un polinomio en z actúa sobre una serie de potencias f por multiplicación. Por eso hay que prestar atención al hecho de que las variables z y d/dz no conmutan: $z(d/dz)$ envía f a $zf'(z)$, mientras que $(d/dz)z$ envía f a $(zf(z))' = f(z) + zf'(z)$, es decir, se tiene

$$(d/dz)z - z(d/dz) = 1. \tag{2.2}$$

Antes de pasar a los ejemplos, hagamos algunos comentarios sobre la definición de función E. En primer lugar, el nombre E hace referencia a la función exponencial, que es el ejemplo en el que todos los coeficientes a_n son iguales a 1; es la situación que Siegel se propone generalizar. El modo en que comienza el capítulo dedicado a los números trascendentes lo deja claro:

> *Los teoremas de Hermite y Lindemann han resuelto la cuestión de las propiedades aritméticas de los valores de la función exponencial en argumentos algebraicos. Mientras que la aditividad de la función exponencial reduce toda ecuación algebraica entre los valores de esta función a una ecuación lineal, no existe nada comparable para otras funciones, y ahí yace la dificultad a la hora de generalizar los argumentos de Hermite. Para ninguna otra de las funciones que son importantes en el análisis se ha encontrado un teorema de fuerza similar al de la exponencial.*

En segundo lugar, la existencia de una ecuación diferencial de la forma (2.1) equivale a la existencia de una relación de recurrencia

$$P_0(n)a_n + P_1(n)a_{n+1} + \cdots + P_\ell(n)a_{n+\ell} = 0 \tag{2.3}$$

entre los coeficientes de la serie f, donde ℓ es un entero y $P_0, \ldots, P_\ell \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. A partir de la ecuación diferencial, la relación (2.3) se obtiene simplemente igualando a 0 el coeficiente de grado n del lado izquierdo de (2.1) y simplificando con cuidado los factoriales. Una consecuencia interesante es que, a pesar de que en la definición de función E solo hemos pedido que los a_n sean números algebraicos, la mera existencia de la ecuación diferencial implica que el cuerpo $\mathbb{Q}(a_0, a_1, \ldots)$ es una extensión *finita* de $\mathbb{Q}$, es decir, que existe un cuerpo de números K tal que $f(z)$ pertenece a $K[\![z]\!]$. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{n}} z^n$ no es solución de una ecuación diferencial porque no hay ningún cuerpo de números que contenga todas las raíces de la unidad.

Gracias a esta propiedad, la condición de crecimiento del valor absoluto de los conjugados galoisianos de los coeficientes hace intervenir solo un número finito de $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. De hecho, eligiendo un elemento primitivo de K, se puede escribir f como una combinación K-lineal de series de potencias con coeficientes racionales, y no es difícil demostrar que cada una de estas series es a su vez una función E. La primera condición de crecimiento implica que las funciones E tienen radio de convergencia infinito. En particular, podemos evaluarlas en cualquier número algebraico; llamaremos *valores especiales* a los números $f(\alpha)$ con $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. La condición sobre los denominadores permite distinguir desde un punto de vista aritmético números muy próximos en valor absoluto como 1 y 1,000000000000000000000000000000001, y es crucial a la hora de obtener resultados de trascendencia. En la práctica, suele ser también la condición más difícil de comprobar. Recordemos que los *enteros algebraicos* son aquellos números algebraicos que son raíz de un polinomio mónico con coeficientes enteros. Si α es raíz de $P = b_d X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{Z}[X]$, con b_d distinto de cero, entonces $b_d\alpha$ es raíz del polinomio mónico $X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 b_d^{d-1}$, es decir, $b_d\alpha$ es un entero algebraico. Esto explica la existencia de los enteros d_n en la segunda condición de crecimiento; en el caso de una función E con coeficientes racionales, son literalmente los denominadores comunes de $a_1, \ldots, a_n$.

Ejemplo 2.2 (Funciones de Bessel). El primer ejemplo después de los polinomios con coeficientes algebraicos y la función exponencial es la función de Bessel

$$J_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)(m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+k}}\binom{2m+k}{m}\frac{z^{2m+k}}{(2m+k)!},$$

que, como ya hemos indicado, es solución de una ecuación diferencial de orden 2. En efecto, sus coeficientes son los números racionales

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{2^n}\binom{n}{\frac{n-k}{2}} & \text{si } n = 2m+k, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

que cumplen las condiciones de la definición con $C = 2$ (podemos, por ejemplo, tomar $d_n = 2^n$ como denominador común y utilizar la cota $\binom{n}{j} \leq 2^n$ que resulta del teorema del binomio). Observemos que el hecho de que las potencias que intervienen en la definición de $J_k(z)$ sean $2m+k$ en lugar de $m+k$ es fundamental para garantizar que las funciones de Bessel son funciones E. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}$ no es una función E, porque en este caso $a_n = 1/n!$ y el denominador común de los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ es $n!$ que crece más rápido que cualquier potencia C^n.

Ejemplo 2.3 (Funciones hipergeométricas). El primer ejemplo al que Siegel dedica el calificativo de «no trivial» es el de las series hipergeométricas construidas como sigue. Sean $0 \leq p < q$ números enteros y $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Q}$ y $b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ números racionales. Definimos el *símbolo de Pochhammer* como

$$(x)_0 = 1 \quad y \quad (x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Es una generalización del factorial, que en este lenguaje aparece como $n! = (1)_n$. La hipótesis de que los b_i no son números negativos garantiza que ningún símbolo de Pochhammer $(b_i)_n$ se anula. Siegel demuestra que la *función hipergeométrica*

$$F\left(\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ b_1 & \cdots & b_q \end{matrix} \middle| z^{q-p}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} z^{(q-p)n} \tag{2.4}$$

es una función E. Indiquemos primero que es solución de una ecuación diferencial. Llamando c_n al coeficiente que multiplica a $z^{(q-p)n}$, y P y Q a los polinomios

$$P(X) = (X + a_1) \cdots (X + a_p), \quad Q(X) = (X + b_1 - 1) \cdots (X + b_q - 1),$$

la propiedad de recurrencia del símbolo de Pochhammer implica la igualdad

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n+1)}.$$

De hecho, una forma abstracta de caracterizar las funciones hipergeométricas, sin escribir ninguna fórmula, es por medio de la condición de que el cociente c_{n+1}/c_n de dos términos consecutivos es una función racional de n. Suponiendo que al menos uno de los b_j sea igual a 1, lo que siempre se puede conseguir aumentando los valores de p y q sin cambiar la función, vemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es solución del operador diferencial $Q(\theta) - zP(\theta)$, donde θ es la notación estándar para $z(d/dz)$, es decir, el operador que consiste en derivar primero y luego multiplicar por la variable z. Respecto a la derivada usual, tiene la ventaja de preservar el grado, de modo que si R es un polinomio, se tiene $R(\theta)z^n = R(n)z^n$ para todo n. A partir de ahí, deducimos que (2.4) es solución del operador diferencial

$$L = Q(\tfrac{1}{q-p}\theta) - z^{q-p} P(\tfrac{1}{q-p}\theta),$$

que, si uno se empeña, se puede escribir de la forma más habitual utilizando repetidamente la relación de conmutación (2.2). Es un operador de orden q cuya única singularidad en el plano complejo es el origen.

Para comprobar las condiciones de crecimiento, introducimos $m = q - p$ y utilizamos $(mn)! = (\frac{1}{m})_n \cdots (\frac{m}{m})_n$ para reescribir la función hipergeométrica como

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{mn} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n (\frac{1}{m})_n \cdots (\frac{m}{m})_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^{mn}}{(mn)!}.$$

Hay entonces el mismo número de símbolos de Pochhammer en el numerador que en el denominador, y la cota resulta del hecho de que la sucesión $(x)_n/(y)_n$ tiende a 1 cuando n tiende al infinito. Falta acotar los denominadores, que es la parte más delicada del argumento. Para ello, fijamos un número primo p e intentamos entender cuál es la mayor potencia de p que divide a un número racional x utilizando la valuación p-ádica $v_p(x)$, que se define escribiendo $x = p^{v_p(x)} a/b$ donde a y b son primos entre sí y no divisibles por p. Así, x es un número entero si y solo si $v_p(x) \geq 0$ para todo número primo p. La valuación p-ádica de $n! = (1)_n$ está dada por

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$

como se demuestra observando que el primer término $\lfloor n/p \rfloor$ cuenta el número de veces que $p, 2p, \ldots$ dividen a $n! = 1 \cdots p \cdots 2p \cdots p^2 \cdots 2p^2 \cdots n$, pero solo tiene en cuenta una potencia de p en $p^2, 2p^2, \ldots$, así que hay que añadirle $\lfloor n/p^2 \rfloor$, que a su vez no tiene en cuenta un factor de p en $p^3, 2p^3, \ldots$, y así sucesivamente. La suma es finita, puesto que n es menor que p^k para k lo bastante grande. Para estimar los denominadores de la función hipergeométrica, Siegel estudia la valuación p-ádica de $(x)_n$, que aunque está dada por fórmulas más complicadas que la del factorial, se puede acotar utilizando la versión débil del teorema de los números primos

$$\mathrm{mcm}(1, 2, \ldots, n) \leq 3^n.$$

Ejemplo 2.4 (Operaciones con funciones E). Las funciones E son estables bajo las operaciones de suma, producto, derivada, primitiva $\int_0^z f(t)dt$, homotecia $f(\lambda z)$ de razón algebraica λ y producto «de Hadamard»

$$f \odot g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n!} z^n$$

si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$. En particular,

$$\sum_{i=1}^{r} P_i(z) e^{\alpha_i z}$$

es una función E para cualquier colección de números algebraicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ y de polinomios $P_1, \ldots, P_r \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Las llamamos *polinomios exponenciales.*

Del mismo modo que, aplicando a la función exponencial y a los polinomios las operaciones elementales que preservan la clase de funciones E, obtenemos los polinomios exponenciales, a partir de las funciones hipergeométricas (2.4) se obtiene una clase muy rica de ejemplos: todas las expresiones polinomiales en las funciones

$$F \left(\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ b_1 & \cdots & b_q \end{matrix} \middle| \lambda z^{q-p} \right),$$

donde λ es un número algebraico, que podemos hacer variar igual que p, q, y los parámetros $a_1, \ldots, a_p$ y $b_1, \ldots, b_q$. De hecho, la función exponencial y las funciones de Bessel son de este tipo, como demuestran las fórmulas

$$e^z = F \left(\begin{matrix} \emptyset \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right), \qquad J_k(z) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^k F \left(\begin{matrix} \emptyset \\ 1 \;\; k+1 \end{matrix} \middle| \frac{i}{4} z^2 \right).$$

Nada más introducir la definición de función E, las propiedades de estabilidad y el ejemplo de las funciones hipergeométricas, Siegel observa que sería interesante decidir si toda función E se puede escribir de esta forma. Utilizando las propiedades de las ecuaciones diferenciales de orden minimal de una función E de las que hablaremos en la sección 5, Gorelov [12, 13] demostró en 2004 que la respuesta es positiva para aquellas funciones E de órdenes diferenciales 1 y 2. Guiados por la intuición geométrica de la sección 6, Peter Jossen y yo [10] conseguimos demostrar hace un par de años que la respuesta es negativa para las funciones E de orden diferencial mayor o igual que 3. De hecho, la mayor parte de ellas no son de tipo hipergeométrico.

3. El teorema de Siegel–Shidlovsky

La generalización de las propiedades de trascendencia de la exponencial a otras funciones E que se proponía Siegel en su memoria es lo que hoy en día se conoce como *teorema de Siegel–Shidlovsky.* En su versión definitiva, dice lo siguiente:

Teorema 3.1 (Siegel–Shidlovsky–André–Beukers). *Sean $r \geq 1$ un entero y $f_1, \ldots, f_r$ funciones E que son solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales*

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = A(z)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

donde $A(z) \in \mathrm{M}_r(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ es una matriz con coeficientes en el cuerpo de funciones racionales con coeficientes algebraicos. Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ un número algebraico no nulo que no es un polo de ninguno de los coeficientes de la matriz $A(z)$ y sea

$$P(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) = 0 \qquad (P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_r])$$

una relación algebraica entre los valores que toman $f_1, \ldots, f_r$ en α. Entonces existe un polinomio $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[X_0, X_1, \ldots, X_r]$ tal que $Q(\alpha, X_1, \ldots, X_r) = P(X_1, \ldots, X_r)$ y

$$Q(z, f_1(z), \ldots, f_r(z)) = 0 \quad \textit{para todo } z.$$

En particular, tenemos la igualdad de grados de trascendencia

$$\mathrm{trdeg}_{\overline{\mathbb{Q}}}\,\overline{\mathbb{Q}}\big(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)\big) = \mathrm{trdeg}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1, \ldots, f_n). \tag{3.2}$$

De forma más informal, lo que dice el teorema de Siegel–Shidlovsky es que las únicas relaciones algebraicas entre los valores especiales $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ de una colección de funciones E son las que se obtienen especializando a $z = \alpha$ una relación que existe ya entre las funciones $f_1(z), \ldots, f_r(z)$. Esto lo convierte en uno de los resultados más potentes de la teoría de la trascendencia; como veremos enseguida, sus análogos para otras clases de funciones especiales son completamente falsos.

Antes de seguir descifrando el enunciado, hagamos alguna observación histórica. En su artículo de 1929, Siegel demuestra la versión cuantitativa del enunciado (3.2) para las funciones de Bessel. Su método de demostración, que retoma en el libro [20], se aplica en principio a todas las funciones E siempre y cuando se cumpla una cierta hipótesis de «normalidad». Sin embargo, comprobar que se da esta propiedad en otros ejemplos resulta muy difícil (por ejemplo, no se sabía para las funciones hipergeométricas antes de un trabajo de Beukers, Dale Brownawell y Heckman [6] publicado en 1988). La contribución de Shidlovsky [18] consistió en retirar en 1959 esta condición del método de Siegel, lo cual le permitió demostrar la versión cuantitativa del teorema para cualquier vector de funciones E. Casi cuarenta años más tarde, André [2, 3] propuso una demostración completamente distinta, basada en la estructura de las ecuaciones diferenciales de las funciones E, que en una reelaboración posterior de Beukers [4] permitió demostrar que no solo hay cuantitativamente la misma cantidad de relaciones entre las funciones y sus valores especiales, sino que toda relación algebraica $P(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) = 0$ se levanta a $Q(z, f_1(z), \ldots, f_r(z)) = 0$.

Volviendo al enunciado, la condición de que las funciones $f_1, \ldots, f_r$ sean solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no es restrictiva a la hora de estudiar las propiedades de trascendencia de los valores especiales de una función E particular. En efecto, a partir de una ecuación diferencial de la forma

$$c_r(z)f^{(r)}(z) + \cdots + c_1(z)f'(z) + c_0 f(z) = 0, \tag{3.3}$$

con coeficiente dominante un polinomio $c_r(z)$ no nulo, obtenemos el sistema

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \\ f^{(r-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{c_0}{c_r} & -\frac{c_1}{c_r} & \cdots & & -\frac{c_{r-1}}{c_r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \\ f^{(r-1)} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

en el que los polos de la matriz $A(z) \in M_r(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ son los ceros de $c_r(z)$, es decir, las singularidades de la ecuación diferencial (3.3).

Como las derivadas sucesivas de una función E son funciones E, podemos aplicar el teorema de Siegel–Shidlovsky a este sistema y al polinomio $P = X_1$ para obtener el siguiente resultado: sea α un número algebraico no nulo que no es una singularidad de la ecuación diferencial y sea $P(f(\alpha)) = 0$ una relación algebraica. Entonces existe un polinomio $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[X_0, X_1, \ldots, X_r]$ tal que $Q(z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(r-1)}(z)) = 0$ para todo z. Cuando la función f y sus $r-1$ primeras derivadas son algebraicamente independientes, el único polinomio con esta propiedad es $Q = 0$, y como P se obtiene especializando una de las variables de Q, deducimos que el único polinomio con la propiedad $P(f(\alpha)) = 0$ es el polinomio $P = 0$, es decir, que el número $f(\alpha)$ es trascendente. Por esta razón, es obviamente necesario pedir que α sea distinto de cero: $f(0)$ coincide con el primer coeficiente a_0 de la serie de potencias, que es por definición un número algebraico. La hipótesis de que α no sea un polo de la ecuación diferencial es más interesante: permite excluir ejemplos de funciones E tales como $f(z) = (z-1)e^z$, que pese a ser trascendentes se anulan en $z = 1$. Como $f'(z) = ze^z$, se cumple $(z-1)f'(z) - zf(z) = 0$, y la ecuación diferencial tiene una singularidad en $z = 1$. La contribución fundamental de André consistió en entender que todas las excepciones aparecen de este modo.

Como ya hemos indicado, el análogo del teorema de Siegel–Shidlovsky para otros tipos de funciones que parecen a priori muy similares es falso. Un ejemplo importante es el de las *funciones* G, introducidas en el mismo artículo de Siegel y que podemos definir rápidamente diciendo que son aquellas series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ es una función E. El nombre G viene esta vez de la serie *geométrica*, que es el caso en el que todos los coeficientes a_n son iguales a 1. Salvo que sea un polinomio, las dos condiciones de crecimiento de los coeficientes a_n implican que el radio de convergencia de una función G es estrictamente positivo pero finito. Llamamos valores especiales de una función G a sus evaluaciones en argumentos algebraicos dentro del disco de convergencia. La diferencia fundamental con las funciones E es que puede ocurrir que una función G algebraicamente independiente con sus derivadas tome valores algebraicos en un argumento algebraico dentro del disco de convergencia y que no es una singularidad de la ecuación diferencial. Un ejemplo fascinante, debido a Beukers y Wolfart [7], es el valor de la función G hipergeométrica

$$g(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}1/12\,5/12\\ 1/2\end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/12)_n(5/12)_n}{(1/2)_n}\frac{z^n}{n!}$$

en el argumento racional $\alpha = 1323/1331$. A pesar de que se trata de una función G solución de un operador diferencial de orden 2 cuyas únicas singularidades en el plano complejo son 0 y 1, y que es algebraicamente independiente con su derivada, el valor $g(\alpha) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{11}$ es algebraico.

Y ahí es donde radica la fuerza del teorema de Siegel–Shidlovsky, en que en general es mucho más fácil estudiar las propiedades de trascendencia de las funciones que las de los números, y cuando trabajamos con funciones E podemos transferir las primeras a las segundas. Por ejemplo, sabemos que la función exponencial e^z es trascendente por el simple hecho de ser periódica: de ser algebraica, existiría un polinomio no nulo $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$ de grado minimal en la variable Y tal que $P(z, e^z) = 0$. Como $e^{2\pi in} = 1$ para todo entero n, el polinomio en una variable $P(X, 1) \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$ tiene infinitas raíces distintas, y por tanto es igual a cero. Pero entonces podemos factorizar $P(X, Y) = (Y - 1)Q(X, Y)$, y Q es un polinomio de grado estrictamente menor en la variable Y que cumple $Q(z, e^z) = 0$, ¡contradicción! Una vez que sabemos que e^z es una función trascendente y que el operador diferencial $d/dz - 1$ que la anula no tiene singularidades en el plano complejo, el teorema 3.1 implica que e^α es trascendente para todo número algebraico no nulo α. Más generalmente, el teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass también se deduce de Siegel–Shidlovsky, utilizando esta vez que si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, las funciones E dadas por $e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_r z}$ son algebraicamente independientes. En este caso, en el sistema diferencial (3.1) la matriz $A(z)$ es diagonal con coeficientes constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ y, por tanto, no tiene polos.

En vista de la relación entre las funciones trigonométricas y la función exponencial, no es sorprendente que el teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass permita determinar todas las relaciones entre los valores que toman $\sin z$ y $\cos z$ en argumentos algebraicos. Me gusta la formulación que han encontrado hace muy poco Adamczewski y Delaygue [1]: para cada número algebraico α, introducen variables formales X_α e Y_α que están sujetas a las relaciones

$$X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 = 1, \quad X_{\alpha+\beta} = X_\alpha X_\beta - Y_\alpha Y_\beta, \quad Y_{\alpha+\beta} = X_\alpha Y_\beta + Y_\alpha X_\beta,$$

y demuestran que si I es el ideal generado por estas relaciones, la aplicación $\overline{\mathbb{Q}}$-lineal

$$\mathrm{ev}\colon \overline{\mathbb{Q}}[(X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}}]/I \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por $\mathrm{ev}(X_\alpha) = \cos\alpha$ y $\mathrm{ev}(Y_\alpha) = \sin\alpha$ es inyectiva. Dicho de otro modo, todas las relaciones algebraicas entre $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$ se deducen del teorema de Pitágoras y de las fórmulas de adición de estas funciones trigonométricas. El resultado no es cierto para un número trascendente, que puede satisfacer otras relaciones como $\sin\pi = 0$.

En el caso de la función de Bessel $J_k(z)$, el sistema diferencial es

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} J_k \\ J_k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{z} & -1 + \frac{k^2}{z^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_k \\ J_k' \end{pmatrix},$$

de modo que la única singularidad en el plano complejo es $z = 0$. Siegel observa que la función $J_k(z)$ es algebraicamente independiente con su derivada y deduce del teorema 3.1 que $J_k(\alpha)$ es trascendente para todo número algebraico α distinto de cero. Demuestra así la hipótesis de Bourget.

4. La demostración de Bézivin-Robba

Se podría decir que la teoría «moderna» de las funciones E comenzó cuando Bézivin y Robba [9] encontraron en 1989 una demostración muy original del teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass basada en las ecuaciones diferenciales. Observaron que la independencia algebraica de las exponenciales era equivalente a un enunciado sobre los polinomios exponenciales introducidos en el ejemplo 2.4.

Teorema 4.1 (Bézivin–Robba). *Sea $f(z)$ un polinomio exponencial que se anula en $z = 1$. Entonces $f(z)/(z-1)$ es un polinomio exponencial.*

Que el teorema 1.2 implica este enunciado es muy sencillo. En efecto, después de reorganizar los términos si es necesario, podemos suponer que en la expresión del polinomio exponencial $f(z) = \sum_{i=1}^r P_i(z)e^{\alpha_i z}$ todos los $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son números algebraicos *distintos*. Como los P_i son polinomios con coeficientes algebraicos, la hipótesis $f(1) = 0$ implica la existencia de la relación $\overline{\mathbb{Q}}$-lineal $\sum_{i=1}^r P_i(1)e^{\alpha_i} = 0$. Por el teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass, no existen relaciones no triviales, de modo que $P_i(1) = 0$ para todo i, es decir, 1 es raíz del polinomio P_i. Factorizando $P_i(z) = (z-1)Q_i(z)$, con $Q_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, vemos que

$$\frac{f(z)}{z-1} = \sum_{i=1}^r Q_i(z)e^{\alpha_i z}$$

es, en efecto, un polinomio exponencial. Lo curioso es que esta propiedad de división, que en principio nada tiene que ver con las propiedades de trascendencia de la función exponencial, implica el teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass. De hecho, basta con conocer el enunciado para los polinomios exponenciales *con coeficientes racionales*, que son aquellos $f(z) = \sum_{i=1}^{r} P_i(z)e^{\alpha_i z}$ en los que, a pesar de que los α_i sean algebraicos y los P_i tengan coeficientes algebraicos, el resultado de desarrollar f en serie de potencias pertenece al subconjunto $\mathbb{Q}[\![z]\!]$ de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$.

El argumento utiliza dos propiedades básicas de la *transformada de Laplace*, que es la operación entre series de potencias dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \quad \rightsquigarrow \quad \widehat{f}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n.$$

La primera nos dice cómo se comporta la transformada de Laplace respecto a la multiplicación por la variable z: es la fórmula

$$\widehat{zf}(y) = y^2 \widehat{f}'(y) + y\widehat{f}(y), \tag{4.1}$$

que se demuestra con un cálculo directo, escribiendo $zf(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_{n-1}}{n!} z^n$ y viendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1}y^n$ coincide con $y^2\widehat{f}'(y) + y\widehat{f}(y)$.

La segunda propiedad es que la transformada de Laplace de un polinomio exponencial es el desarrollo en serie de potencias de una fracción racional. En efecto, usando la linealidad de la transformada de Laplace, es suficiente demostrarlo para un polinomio exponencial de la forma $z^m e^{\alpha z}$. En el caso $m = 0$, la transformada de Laplace de $e^{\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n$ es la fracción racional $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n y^n = \frac{1}{1-\alpha y}$, y el caso general se deduce por inducción aplicando repetidamente la fórmula (4.1).

Sean ahora $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ números algebraicos distintos, y supongamos que existe una relación lineal $\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_r e^{\alpha_r} = 0$ con coeficientes algebraicos $\beta_1, \ldots, \beta_r$. El objetivo es demostrar que son todos nulos. La función

$$f(z) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \cdots + \beta_r e^{\alpha_r z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j^n \right) \frac{z^n}{n!} \tag{4.2}$$

es un polinomio exponencial que se anula en 1 pero que quizá no tenga coeficientes racionales. Para garantizar que se cumple esta última propiedad, consideramos el cuerpo de números $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ y definimos

$$f(z) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \left(\sigma(\beta_1)e^{\sigma(\alpha_1)z} + \cdots + \sigma(\beta_r)e^{\sigma(\alpha_r)z} \right),$$

que es una serie de potencias con coeficientes a priori en K, pero en realidad racionales ya que por construcción es invariante por la acción de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ coeficiente a coeficiente. Gracias a la famosa propiedad de aditividad de la exponencial, $f(z)$ es de nuevo un polinomio exponencial de la misma forma, así que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer desde el principio que (4.2) es un polinomio exponencial con coeficientes racionales que cumple $f(1) = 0$. Gracias al teorema 4.1, existe un polinomio exponencial con coeficientes racionales $g(z)$ tal que $f(z) = (z-1)g(z)$. Tomando la transformada de Laplace de esta igualdad obtenemos

$$\widehat{f}(y) = (\widehat{zg})(y) - \widehat{g}(y) = y^2\widehat{g}'(y) + (y-1)\widehat{g}(y),$$

donde la segunda igualdad resulta de (4.1). La transformada de Laplace se calcula inmediatamente a partir de (4.2), dando lugar a

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\beta_j}{1-\alpha_j y} = y^2 \widehat{g}'(y) + (y-1)\widehat{g}(y). \tag{4.3}$$

Supongamos que no todos los β_j son nulos. Como $\beta_{j_0} e^{\alpha_{j_0}}$ es distinto de cero si β_{j_0} es distinto de cero, tiene que haber al menos dos coeficientes no nulos para que se pueda dar la relación $\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_r e^{\alpha_r} = 0$, y como los α_j son todos distintos entre sí, existe un valor j_0 tal que β_{j_0} y α_{j_0} son ambos no nulos. En ese caso, la fracción racional en el lado izquierdo de (4.3) tiene un polo simple en $1/\alpha_{j_0}$ y, para obtener una contradicción, basta con ver que el lado derecho tiene un polo de orden mayor o igual que 2. Es aquí donde usamos que $g(z)$ es un polinomio exponencial, de modo que la transformada de Laplace $\widehat{g}(y)$ es una fracción racional. Escribiéndola como un cociente de polinomios, vemos que los polos de $y^2\widehat{g}'(y)+(y-1)\widehat{g}(y)$ están contenidos en los polos de $\widehat{g}(y)$. Por tanto, $\widehat{g}(y)$ tiene que tener un polo en $1/\alpha_j$, pero este polo no puede ser simple porque la derivada de una fracción racional aumenta el orden del polo. De esta contradicción se deduce que todos los β_j son nulos, es decir, el teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass en su versión del teorema 1.2.

A continuación, Bézivin y Robba [9] demuestran de forma independiente que si un polinomio exponencial $f(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$ cumple $f(1) = 0$, entonces $f(z)/(z-1)$ sigue siendo un polinomio exponencial. Usando la interpretación en términos de la transformada de Laplace, lo que en realidad demuestran es que, dada una serie de potencias $u \in \mathbb{Q}[\![y]\!]$ cuyo radio de convergencia es estrictamente positivo, si el resultado de aplicar el operador diferencial $L = y^2 d/dy + (y-1)$ a u es el desarrollo en serie de una fracción racional, entonces la serie de partida u era ya una fracción racional. En su demostración original, Bézivin y Robba deducían este enunciado de un criterio de racionalidad de Polya–Bertrandias. Poco después, Beukers [5] encontró una demostración elemental, en la que explota una información que ya conocemos, que si $\widehat{g}(y)$ es una fracción racional sus polos están contenidos en el conjunto de los $1/\alpha_j$, para ver directamente que la serie de potencias

$$(y-1/\alpha_1)^N \cdots (y-1/\alpha_j)^N \widehat{g}(y)$$

es un polinomio para un entero N suficientemente grande.

5. Las ecuaciones diferenciales de las funciones E

Estudiando la demostración de Bézivin y Robba, André [2] se dio cuenta hacia el año 1997 de que detrás de ella se escondía un teorema general sobre la estructura de las ecuaciones diferenciales de las funciones E. Dado un operador diferencial que anula una serie de potencias, cualquier otro múltiplo por la izquierda también la anula, así que solo podremos decir algo interesante sobre las ecuaciones diferenciales de una función E si suponemos que cumplen una cierta propiedad de minimalidad, por ejemplo que son de orden minimal entre todas las que la anulan.

Teorema 5.1 (André). *Un operador diferencial L de orden minimal que anula una función E distinta de cero admite una base de soluciones holomorfas alrededor de todo punto distinto del origen en el plano complejo.*

Recordemos que el teorema de Cauchy implica que la propiedad del enunciado es cierta alrededor de todo punto que no es una singularidad de L. El teorema de André *no* dice que la única singularidad de L sea $z = 0$. Pueden existir otras singularidades, pero se trata de singularidades triviales, alrededor de las cuales existe una base de funciones univaluadas, sin monodromía. Por ejemplo, ya hemos visto que $f(z) = (z-1)e^z$ es solución del operador diferencial $L = (z-1)d/dz - z$, que es de grado minimal entre los que anulan esta función E. Este operador tiene una singularidad en $z = 1$, pero eso no impide que exista una base de soluciones holomorfas alrededor de este punto, en este caso dada por la función ze^{z+1}. Derivando una vez más, se obtiene $f''(z) = (z+1)e^z$, de modo que $f(z)$ es también solución de la ecuación diferencial con coeficientes constantes

$$f''(z) - 2f'(z) + f(z) = 0.$$

En esta situación muy particular, no hay ninguna singularidad en el plano complejo. En general, André demuestra que la única singularidad posible en el plano complejo de un operador diferencial de grado minimal en z que anula una función E es el origen. Son los llamados *E-operadores*, y la demostración del teorema 5.1 pasa por un estudio fino de las propiedades aritméticas de sus transformadas de Fourier, que son los operadores que se obtienen remplazando formalmente en la expresión de L la variable d/dz por z y la variable z por $-d/dz$. Por ejemplo, la transformada de Fourier de $(z-1)d/dz - z$ es el operador diferencial $(1-z)d/dz - (z+1)$.

Un operador diferencial L de orden minimal que anula una función E goza de varias propiedades notables de «permanencia», como las llama André. La primera es que el simple hecho de que haya una función E distinta de cero entre sus soluciones implica que alrededor de todo punto algebraico no nulo α del plano complejo existe una base de soluciones de la forma $f_1(z-\alpha), \dots, f_r(z-\alpha)$, donde $f_1, \dots, f_r$ son funciones E. Como el origen es casi siempre una singularidad, hay que tener más cuidado al formular la propiedad de permanencia alrededor de este punto: André demuestra que existe una base de soluciones que son combinaciones lineales de lo que me gusta llamar «funciones E con monodromía» $z^a(\log z)^b f(z)$, donde a es un número racional y b un entero mayor o igual que 0. Otra propiedad de permanencia sorprendente es que si una solución se anula en $z = 1$, entonces todas lo hacen.

Corolario 5.2. *Sea $f(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$ una función E no nula con coeficientes racionales y sea $Lf = 0$ una ecuación diferencial de orden minimal. Si $f(1) = 0$, entonces todas las soluciones de L se anulan en $z = 1$, que por lo tanto es una singularidad de L.*

El corolario se deduce del teorema utilizando la observación de que si f es una función E con coeficientes racionales tal que $f(1) = 0$, entonces $g(z) = f(z)/(z-1)$ sigue siendo una función E. Es, en cierta medida, una generalización del teorema sobre los polinomios exponenciales, salvo que si la aplicamos a ese caso la conclusión es más débil (dice que el cociente es una función E, en lugar de la información más precisa de que es un polinomio exponencial), y eso explica que el enunciado sea considerablemente más fácil de demostrar. De hecho, es un ejercicio a partir de la definición. En efecto, si L es un operador diferencial que anula $f(z)$, entonces $L\cdot(z-1)$ anula $g(z)$. Escribiendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$, tenemos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!} \quad \text{con} \quad b_n = -n! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}.$$

Como $k!$ divide a $n!$ si $k \leq n$, los coeficientes b_n son combinaciones lineales con coeficientes enteros de los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$, y la misma cota para los denominadores comunes de la función $f(z)$ sigue siendo válida para la función $g(z)$. Para estimar el valor absoluto de los coeficientes, usamos la hipótesis $f(1) = 0$ para escribir

$$b_n = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k!},$$

cuyo valor absoluto podemos a continuación estimar fácilmente: si $|a_n| \leq C^n$,

$$|b_n| \leq n! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{C^k}{k!} \leq n! \frac{C^n}{n!} \left(1 + C + \frac{C^2}{2!} + \cdots\right) \leq C^n e^C.$$

Esta cota completa la demostración de que $f(z)/(z-1)$ es una función E. La hipótesis de que los coeficientes de $f(z)$ son números racionales no es en realidad necesaria, pero el resultado es más difícil de demostrar en el caso general porque, a partir de la condición $f(1) = 0$, no solo hay que deducir una cota superior para $|a_n|$ sino también para $|\sigma(a_n)|$ para todo automorfismo $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. En [4], Beukers explica cómo demostrarlo utilizando un poco de teoría de Galois diferencial.

Una vez que sabemos que $g(z)$ es una función E, podemos completar la demostración del corolario como sigue. Sea L un operador diferencial de orden minimal que anula $f(z)$. Entonces $L \cdot (z-1)$ es un operador diferencial de orden minimal que anula $g(z)$. Aplicado a este último operador, el teorema 5.1 afirma que existe una base de soluciones holomorfas $f_1(z-1), \ldots, f_r(z-1)$ alrededor de $z = 1$. Por tanto, L admite la base de soluciones holomorfas $(z-1)f_1(z-1), \ldots, (z-1)f_r(z-1)$ alrededor de $z = 1$, y todos los elementos de la base se anulan en $z = 1$. Si $z = 1$ no fuese una singularidad de L, esta información contradiría el teorema de Cauchy.

De manera totalmente sorprendente, André descubrió que el corolario 5.2 se puede utilizar para hacer demostraciones de trascendencia de naturaleza muy distinta a la que estamos acostumbrados; por eso tituló su artículo *Trascendencia sin trascendencia* [3]. Es la manera en la que él y Beukers demuestran la versión definitiva del teorema de Siegel–Shidlovsky que hemos enunciado en la sección 3. A título de ejemplo, veamos cómo deducir el teorema de Hermite–Lindemann–Weierstrass. Consideremos, como en la sección 4, la función E con coeficientes racionales

$$f(z) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \left(\sigma(\beta_1) e^{\sigma(\alpha_1) z} + \cdots + \sigma(\beta_r) e^{\sigma(\alpha_r) z}\right),$$

que no es idénticamente cero, salvo que todos los β_j lo sean, porque las funciones $e^{\alpha_i z}$ son linealmente independientes para distintos valores de α_i. Como para todo polinomio exponencial en el que los polinomios que multiplican a las exponenciales son constantes, existe un operador diferencial de orden minimal *con coeficientes constantes* que anula esta función. Por ejemplo, $\sum_{j=1}^{r} \beta_j e^{\alpha_j z}$ es solución del operador

$$L = \left(\tfrac{d}{dz} - \alpha_1\right) \cdots \left(\tfrac{d}{dz} - \alpha_r\right).$$

Como $z = 1$ no es una singularidad de L, del corolario 5.2 se deduce que $f(1)$ es distinto de cero, es decir, que la combinación lineal $\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_r e^{\alpha_r}$ es distinta de cero si al menos uno de los β_j es no nulo.

6. Una fuente geométrica de funciones E

La función de Bessel $J_k(z)$ no solo admite la representación en serie de potencias que hemos tomado como definición, sino también la representación integral

$$J_k(z) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{|x|=1} e^{-\frac{z}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} \frac{dx}{x^{k+1}}.$$

En efecto, el lado izquierdo es igual a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{m!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \left(x - \frac{1}{x}\right)^m \frac{dx}{x^{k+1}} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^m,$$

y utilizando el teorema del residuo vemos que la integral que queda es el coeficiente de grado k de $(x - \frac{1}{x})^m$, que solo es no nulo, igual a $(-1)^n \binom{2n+k}{n}$, cuando $m = 2n+k$.

Esta representación sugiere estudiar las *funciones de períodos exponenciales*

$$\int_\sigma e^{-zh}\omega, \tag{6.1}$$

donde h es una función algebraica, ω es una forma diferencial algebraica y σ es un dominio que hace que la integral converja en un sector que emana del origen. Podemos tomar un ciclo compacto, como el círculo unidad en el caso de $J_k(z)$, o un dominio no compacto, siempre y cuando $\mathrm{Re}(h)$ tienda a $+\infty$ a lo largo de su borde.

Muchas de las características de las funciones de Bessel son el reflejo de propiedades generales de las funciones (6.1). Para explicarlas, se introduce una cohomología de de Rham adaptada a este tipo de integrales, que va a indicarnos cuáles son las formas diferenciales ω que dan lugar a integrales independientes. La idea es deducir del teorema de Stokes y del cálculo de la diferencial del integrando

$$d(e^{-zh}\omega) = e^{-zh}(d\omega - d(zh) \wedge \omega)$$

que, si la diferencia entre dos formas diferenciales se puede escribir como $d\eta - d(zh) \wedge \eta$ para algún η, entonces sus integrales de períodos exponenciales coinciden.

En el caso de las funciones de Bessel, este razonamiento nos lleva a interesarnos por el conúcleo de la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x,x^{-1}] &\longrightarrow \mathbb{C}[x,x^{-1}]dx \\ P &\longmapsto \left(P' - \tfrac{z}{2}(1+1/x^2)P\right)dx. \end{aligned}$$

Como la función $h = \frac{1}{2}(x - 1/x)$ tiene un polo en $x = 0$, el espacio relevante para estudiar este problema es el plano complejo menos el origen, y una función algebraica en este espacio es un polinomio de Laurent. El codominio de la aplicación es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por las formas diferenciales $x^n dx$ para todo entero n, pero calculando la imagen de distintos valores de P obtenemos relaciones en el conúcleo. Por ejemplo, si P es el polinomio constante igual a 1, el cálculo

$$\left(P' - \tfrac{z}{2}(1+1/x^2)P\right)dx = -\tfrac{z}{2}(dx + dx/x^2),$$

muestra que las formas diferenciales dx y $-dx/x^2$ definen la misma clase en el conúcleo, y dando a P el valor $1/x^k$ se obtiene la relación

$$z\frac{dx}{x^{k+2}} \equiv -2k\frac{dx}{x^{k+1}} - z\frac{dx}{x^k}. \tag{6.2}$$

A partir de ahí, es un ejercicio ver que el conúcleo tiene dimensión 2 y que se pueden elegir como generadores dos formas diferenciales «consecutivas» $\frac{dx}{x^{k+1}}$ y $\frac{dx}{x^{k+2}}$.

De la relación entre formas diferenciales (6.2) se deduce de inmediato una relación de recurrencia entre funciones de Bessel de órdenes $k-1$, k y $k+1$, a saber

$$zJ_{k+1}(z) = 2kJ_k(z) - zJ_{k-1}(z),$$

que es el caso $m = 1$ de la relación (1.3) en la que aparecen los polinomios de Lommel. Además, el hecho de que el conúcleo sea de dimensión 2 implica que la función de Bessel es solución de una ecuación diferencial de orden 2. En efecto, al derivar dos veces bajo el signo integral obtenemos las tres formas diferenciales

$$\omega = \frac{dx}{x^{k+1}}, \quad \nabla(\omega) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^{k+1}} \quad \text{y} \quad \nabla^2(\omega) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\frac{dx}{x^{k+1}},$$

y, como el conúcleo es de dimensión 2, tiene que existir una relación lineal entre sus clases. Conociendo la ecuación diferencial, no es difícil comprobarlo:

$$\begin{aligned} z^2\nabla^2(\omega) &+ z\nabla(\omega) + (z^2 - k^2)\omega \\ &= \frac{z^2}{4}\frac{dx}{x^{k+3}} + \frac{z}{2}\frac{dx}{x^{k+2}} + \left(\frac{z^2}{2} - k^2\right)\frac{dx}{x^{k+1}} - \frac{z}{2}\frac{dx}{x^k} + \frac{z^2}{4}\frac{dx}{x^{k-1}}, \end{aligned}$$

y aplicando repetidamente (6.2) vemos que el lado derecho se anula en el conúcleo.

Nos gustaría pensar en las funciones de períodos exponenciales (6.1) como una fuente geométrica de funciones E, e incluso especular que todas se pueden obtener así. Sin embargo, hay dos razones por las que (6.1) no es exactamente una función E.

La primera ya la hemos visto en el caso de las funciones de Bessel: hace falta dividir la integral por un factor trascendente para que la serie de potencias tenga coeficientes algebraicos. En este caso, ese factor es el período

$$2\pi i = \int_{|x|=1} \frac{dx}{x}$$

que aparece como el valor de la integral en $z = 0$. La segunda razón es que, cuando integramos sobre un dominio no compacto, la integral no suele definir una función entera, y hay que tener cuidado con la monodromía. Por ejemplo, en el caso de la función de Bessel, hay un segundo dominio de integración que da lugar a una integral independiente: el camino no compacto σ que parte del origen por la izquierda (para que $-1/x$ tenga parte real muy positiva) y continúa hasta $+\infty$ por el eje real (donde x tiene parte real muy positiva) después de haber girado un poco para evitar cruzar la singularidad. La función de períodos exponenciales correspondiente

$$\int_\sigma e^{-\frac{z}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} \frac{dx}{x^{k+1}}$$

es también solución de la ecuación diferencial de Bessel y forma, junto a $J_k(z)$, una base de soluciones. En los tratados clásicos se llama función de Bessel de *segunda especie*. En [11], Jossen y yo demostramos que estas son las únicas obstrucciones:

Teorema 6.1 (Fresán–Jossen). *La función $\int_\sigma e^{-zh}\omega$ se puede escribir como una combinación lineal de funciones E con monodromía,*

$$z^{a_i}(\log z)^{b_i} f_i(z)$$

con coeficientes en el anillo generado por los períodos, los valores de la función gamma en argumentos racionales y la constante γ de Euler.

Por ejemplo, en el caso de la función de Bessel de segunda especie que acompaña a $J_0(z)$, la función E que aparece en la descomposición según la monodromía es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} H_n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

donde $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ son los números armónicos. Esta función resulta ser de tipo hipergeométrico, pero un estudio sistemático de otros ejemplos parecidos fue el que nos permitió responder en [10] a la pregunta de Siegel.

Referencias

[1] B. Adamczewski y E. Delaygue, Algebraic relations between sine and cosine values, aceptado en *Amer. Math. Monthly.*

[2] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité, *Ann. of Math.* **151** (2000), no. 2, 705–740.

[3] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique. II. Transcendance sans transcendance, *Ann. of Math.* **151** (2000), no. 2, 741–756.

[4] F. Beukers, A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem, *Ann. of Math.* **163** (2006), no. 1, 369–379.

[5] F. Beukers, J. P. Bézivin y P. Robba, An alternative proof of the Lindemann–Weierstrass theorem, *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 193–197.

[6] F. Beukers, W. Dale Brownawell y G. Heckman, Siegel normality, *Ann. of Math.* **127** (1988), no. 2, 279–308.

[7] F. Beukers y J. Wolfart, Algebraic values of hypergeometric functions, en *New advances in transcendence theory (Durham, 1986)*, 68–81, Cambridge Univ. Press, 1988.

[8] J. Bourget, Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1866), 55–95.

[9] J-P. Bézivin y P. Robba, A new p-adic method for proving irrationality and transcendence results, *Ann. of Math.* **129** (1989), no. 1, 151–160.

[10] J. Fresán y P. Jossen, A non-hypergeometric E-function, *Ann. of Math.* **194** (2021), no. 3, 903–942.

[11] J. Fresán y P. Jossen, E-functions and geometry, en preparación.

[12] V. A. Gorelov, On the Siegel conjecture for the case of second-order linear homogeneous differential equations, *Mat. Zametki* **75** (2004), no. 4, 549–565.

[13] V. A. Gorelov, On the structure of the set of E-functions satisfying second-order linear differential equations, *Mat. Zametki* **78** (2005), no. 3, 331–348.

[14] C. Hermite, Sur la fonction exponentielle, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[15] M. Kontsevich y D. Zagier, Periods, en *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, 771–808, Springer, Berlin, 2001.

[16] F. Lindemann, Über die Zahl π, *Math. Ann.* **20** (1882), no. 2, 213–225.

[17] F. Lindemann, Über die Ludolph'sche Zahl, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenchaften zu Berlin* **2** (1882), 679–682.

[18] A. B. Shidlovsky, A criterion for algebraic independence of the values of a class of entire functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **23** (1959), 35–66.

[19] C. L. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. Preuß. Akad. Wissen. Phys.-math. Klasse, 1, 1929. Reimpreso en Ges. Abh. Bd. I, Springer-Verlag 1966, 209–266.

[20] C. L. Siegel, Transcendental numbers, Annals of Mathematics Studies **16**, Princeton University Press, 1949.

[21] K. Weierstrass, Zu Lindemann's Abhandlung: "Über die Ludolph'sche Zahl", *S.-B. Preuss. Akad. Wiss.* 1885, 1067–1085.

Javier Fresán, Sorbonne Université y Université Paris Cité, CNRS, IMJ-PRG, 75005 Paris, France

Correo electrónico: `javier.fresan@imj-prg.fr`

Página web: `http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/`