

On considère une équation de Weierstrass affine (pas nécessairement lisse)

$$(W)_{A,B}: y^2 = x^3 + Ax + B \quad \text{ce que l'on suppose ici!}$$

où $A, B \in k$. Si la caractéristique de k est $\neq 2, 3$, toute courbe elliptique peut être décrite par une telle équation, et les seuls changements de variables qui préservent les équations de la forme $W_{A,B}$ sont les:

$$(V) \quad (x, y) \mapsto (x', y') = (u^2 x, u^3 y) \quad \text{pour } u \in k^\times.$$

Définition: • On appelle discriminant de l'équation de Weierstrass (W) l'élément

$$\Delta = -16(4A^3 + 27B^2)$$

• On appelle j-invariant de (W) l'élément

$$j = -1728 \frac{(4A)^3}{\Delta} \quad 1728 = 2^6 3^2$$

Remarque: • On peut définir Δ et j pour des équations de Weierstrass générales, les formules sont moins digestes. Si l'équation a la forme

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$

$$\text{alors on pose } b_2 = a_1^2 + 4a_2, \quad b_4 = 2a_4 + a_1 a_3, \quad b_6 = a_3^2 + 4a_6,$$

$$b_8 = a_1^2 a_6 + 4a_2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 - a_4^2, \quad c_4 = b_2^2 - 24b_4$$

et des

$$\Delta = -b_2^2 b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2 b_4 b_6, \quad j = \frac{c_4^3}{\Delta}$$

• Si on considère un changement de variable (V), alors

$$A' = u^4 A \quad \text{et} \quad B' = u^6 B$$

et donc $\Delta' = u^{12} \Delta$ et $j' = j$. En particulier, si (W) est l'équation affine d'une courbe elliptique, alors $\Delta \neq 0$ et j ne dépendent que de E .

Les quantités j et Δ ont une signification pour la raison suivante:

Proposition: (i) L'équation (W) est non singulière ssi $\Delta \neq 0$.

(ii) Si k est algébriquement clos, alors deux courbes elliptiques de même j-invariant sont isomorphes.

(iii) Soit $j_0 \in \mathbb{A}^1$. Alors il existe une courbe elliptique définie sur $k(j_0)$ dont le j-invariant est j_0 .

Démonstration: Avant de démontrer (i), on démontre que le point "marquant" $(0, 0)$ n'est jamais singulier. On considère l'équation homogène dans $\mathbb{P}^2$:

$$f(x, y, z) = y^2 z - (x^3 + Axz^2 + Bz^3) = 0$$

$$\text{On a d'abord: } \frac{\partial f}{\partial z}(0) = (y^2 - 2Axz - 3Bz^2)|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = 0 \neq 0.$$

(i) Soit $P_0 = (x_0, 0) \in E \setminus \{O\}$ un point singulier. Alors $(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y})|_{(x_0, 0)} = (0, 0)$:

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^3 - Ax - B) = -3x^2 - A \Rightarrow A = -3x_0^2 \\ \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - \dots) = 2y \Rightarrow 2y_0 = 0 \quad \text{car } \text{car}(k) \neq 2. \end{cases}$$

$$\text{et comme } 0 = y_0^2 = x_0^3 + Ax_0 + B = x_0^3 + 3x_0^3 + B \Rightarrow B = -4x_0^3.$$

$$\text{Alors } \Delta = -16(4A^3 + 27B^2) = -16(-4(3x_0^2)^3 + 27(-4x_0^3)^2) = 0$$

ce qui montre que $\Delta \neq 0 \Rightarrow E$ non singulière.

Réciproquement, par (S), on voit que les points singuliers de E , s'il y en a, sont de la forme $(x_0, 0)$ ($\text{car}(k) \neq 2$) pour lesquels x_0 est racine double du polynôme

$$P(x) = x^3 + Ax + B$$

Or $\text{disc}(P) = \Delta$. Or P a une racine double ssi $\Delta = 0$ ce qui conclut.

(ii) On a déjà mentionné en Remarque que deux courbes elliptiques isomorphes ont même j-invariant. Réciproquement, si $j(E) = j(E')$, alors

$$-1728 \frac{(4A)^3}{\Delta} = -1728 \frac{(4A')^3}{\Delta'} \quad \text{car } \text{car}(k) \neq 2, 3$$

puisque:

$$\Delta' A^3 = \Delta A'^3 \quad \text{soit} \quad (4A^3 + 27B^2)A^3 = (4A'^3 + 27B'^2)A'^3$$

$$\text{et enfin} \quad B'^2 A^3 = B^2 A'^3.$$

1. Si $A = 0$ alors $j = 0$, puis $B \neq 0$ puisque $\Delta \neq 0$. On peut donc prendre pour $u = (B/B')^{1/6}$

2. Si $B = 0$ alors $j = 1728$, puis $A \neq 0$ donc $B' = 0$ et on prend $u = (A/A')^{1/4}$

3. Si $AB \neq 0$, alors $j \neq 0, 1728$, puis $A'B' \neq 0$ car s'il y avait un des deux nul on aurait qu'ils sont tous deux nuls, puis $\Delta' = 0$. On peut donc prendre

$$u = \left(\frac{A}{A'}\right)^{1/4} = \left(\frac{B}{B'}\right)^{1/6}$$

(iii) • Si $j_0 \in \{0, 1728\}$, alors on peut prendre

$$E: y^2 + y = x \quad \Delta = -27, \quad j = 0$$

$$\text{ou } E: y^2 = x^3 + x \quad \Delta = -64, \quad j = 1728.$$

• Si $j_0 \notin \{0, 1728\}$, on considère la courbe

$$E: y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{j_0 - 1728} x - \frac{1}{j_0 - 1728}$$