Valeurs de fonctions L et périodes

<u>But</u> : expliquer une conjecture de Deligne en 1979 qui dit que certains nombres définis par des séries peuvent également s'écrire comme des intégrales

<u>Exemples</u> :

* $$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \quad \text{pour } n \geq 2$$

* $$L(\chi_{-3}, n) = \sum_{k=}^{\infty} \left[\frac{1}{(3k+1)^n} - \frac{1}{(3k+2)^n} \right] \quad \text{pour } n \geq 1$$

caractère de Dirichlet associé à $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}$

* $$\sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Z} \\ (a,b) \neq (0,0)}} \frac{1}{(a+bi)^{4n}} \quad \text{pour } n \geq 1$$

si l'exposant est impair ou $\equiv 2 \bmod 4$ la somme s'annule

<u>Euler 1735</u> : si n est pair $\zeta(n) \in \underbrace{(2\pi i)^n}\mathbb{Q}^\times$

e.g. $\zeta(2) = \frac{(2\pi i)^2}{-24}$

$$\int_{|x_i|=1} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$$

Si n est impair, on conjecture que $\zeta(n)$ et $2\pi i$ sont algébriquement indépendants...

Dirichlet 1837 : si n est impair,

$$L(\chi_{-3}, n) \in (2\pi i)^n \underbrace{\sqrt{-3}}_{i\int_{\substack{x\geq 0\\ x^2\leq 3}} dx} \mathbb{Q}^\times$$

e.g. $$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3k+1)^3} - \frac{1}{(3k+2)^3}\right] = \frac{\sqrt{-3}(2\pi i)^3}{486}$$

mais par exemple $L(\chi_{-3}, 2)$ n'est pas un multiple rationnel de $(2\pi i)^2$ par un théorème tout frais de Calegari–Dimitrov–Tang.

Hurwitz 1897 : $$\sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{Z}\\ (a,b)\neq(0,0)}} \frac{1}{(a+bi)^{4n}} \in \Bigg(\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}}_{\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-x}}}\Bigg)^{4n} \cdot \mathbb{Q}^\times$$

Qu'est-ce qui se passe ?

séries = valeurs en certains entiers de fonctions L de motifs sur $\mathbb{Q}$

X variété projective et lisse définie sur $\mathbb{Q}$: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ lieu des zéros de polynômes homogènes à coefficients dans $\mathbb{Z}$

et $X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est une variété complexe.
Cette condition peut se tester par le critère jacobien : par exemple, si $f(X_0, \dots, X_n) = 0$, pas de racine commune de $\frac{\partial f}{\partial X_i}$.

Pour $\boxed{\text{presque tout } p}$, en réduisant les coefficients modulo p on obtient X_p projective et lisse sur $\mathbb{F}_p$. On peut alors compter les points et former la série génératrice

premiers de bonne réduction

$$Z_p(X,T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X_p(\mathbb{F}_{p^n})|}{n} T^n\right)$$

conjectures de Weil

$$= \frac{P_p^{(1)}(T) \cdots\cdots P_p^{(2\dim X - 1)}(T)}{P_p^{(0)}(T) \cdots\cdots P_p^{(2\dim X)}(T)}$$

où les $P_p^{(i)}$ sont dans $\mathbb{Z}[T]$, de la forme

$$P_p^{(i)}(T) = \prod (1 - \alpha_{ij} T) \quad \text{avec } |\alpha_{i,j}| = p^{i/2}.$$

<u>Définition</u> : La fonction L (incomplète) du motif $M = H^i(X)$ est

$$L(H^i(X), s) = \prod_{p \text{ bonne réduction}} \frac{1}{P_p^{(i)}(p^{-s})}$$

converge sur $\mathrm{Re}(s) > \frac{i}{2} + 1$

Exemples : 1) $X \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ $\{X_0 = 0\}$ Spec $\mathbb{Q}$

$|X(\mathbb{F}_{p^n})| = 1$ pour tout p

$$Z_p(T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n}\right) = \frac{1}{1-T}$$

$$L(H^0(X), s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s)$$

2) $X \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ $X_0^2 + 3X_1^2 = 0$ Spec $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

bonne réduction en $p \neq 3$ discriminant -3

mauvaise réduction en $p=2$ aussi, mais c'est du folie

$$|X(\mathbb{F}_{p^n})| = \begin{cases} 1 + \left(\frac{-3}{p}\right) & \text{pour } n \text{ impair} \\ 2 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

$\mathbb{F}_{p^2} \subset \mathbb{F}_{p^4} \subset \cdots$

d'où $$Z_p(T) = \frac{1}{(1-T)\cdot\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)T\right)}$$

(Ici, $\left(\frac{-3}{p}\right) = \chi_{-3}(p)$ est le symbole de Legendre $= \begin{cases} 1 & \text{si } -3 \text{ est un carré modulo } p \iff p \equiv 1 \bmod 3 \\ -1 & \text{si } -3 \text{ n'est pas un carré modulo } p \iff p \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$)

$$L(H^0(X), s) = \prod_{p \neq 3} \frac{1}{(1-p^{-s})\cdot(1-\chi_{-3}(p)\,p^{-s})}$$

$$= (1-3^{-s})\,\zeta(s)\cdot \boxed{L(\chi_{-3}, s)}$$

C'est un exemple de décomposition de $H^0(X)$ en motifs : $H^0(\operatorname{Spec} \mathbb{Q}(\sqrt{-3})) = \underbrace{H^0(\operatorname{Spec} \mathbb{Q})}_{\mathbb{Q}(0)} \oplus M(\chi_{-3})$

En général, on utilise l'interprétation

$$P_p^{(i)}(T) = \det\left(1 - \mathrm{Frob}_p T \,\middle|\, H^i_{et}(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$

cohomologie ℓ-adique $= \mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de dimension finie + action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$

$$Z_p(T) = \frac{1}{(1-T)(1-pT)}$$

$$L(\underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Q}(-1)}}{H^2(X)}, s) = \zeta(s-1)$$

Pour chaque p,

$$1 \to I_p \to \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \to 1$$

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

groupe d'inertie (I_p)

et si I_p agit trivialement on récupère une action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ = engendré topologiquement par le Frobenius arithmétique Frob_p^{-1}.

Motif : $(M_\ell)_\ell$ $\quad L(M, s) = \prod_p \det\left(1 - \mathrm{Frob}_p\, p^{-s} \,\middle|\, M_\ell^{I_p}\right)^{-1}$

Hypothèse : indépendant de ℓ

* <u>Propriétés conjecturales</u> : $M = H^i(X)$

* Existence d'un prolongement méromorphe à tout le plan complexe

* Existence d'une équation fonctionnelle

$$\Lambda(M, s) = \varepsilon(M, s)\, \Lambda(M, i+1-s)$$

fonction holomorphe aN^s

où $\Lambda(M,s) = L(M,s) \cdot L_\infty(M,s)$ et $L_\infty(M,s)$ est un produit de fonctions gamma selon une <u>recette de Serre</u>.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)$$

<u>Exemples</u> : $\boxed{M = \mathbb{Q}(0)}$

$$\Lambda(M, s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

avec équation fonctionnelle $\Lambda(M,s) = \Lambda(M, 1-s)$.

$\boxed{M = M(\chi_{-3})}$ $\quad L_\infty(M,s) = \pi^{-\frac{s+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$

C'est parce que $\chi_{-3}(-1) = -1$

sinon $\underline{\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$

En général, la recette dépend des nombres de Hodge $H^i_{sing}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}$ et de l'action de la conjugaison complexe sur la partie $H^{p,p}$.

$H^{p,q} \mapsto H^{q,p}$
conj complexe

pour $X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}(\sqrt{D})$

$H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \mathbb{C}\left[\frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}\right] \oplus \mathbb{C}\left[\frac{\sigma_0-\sigma_1}{2}\right]$

$X(\mathbb{C}) = \{\sigma_0, \sigma_1\}$

<u>Différence</u> entre les situations du début

$\zeta(s)$ $\quad \Gamma(\frac{s}{2})$ et $\Gamma(\frac{1-s}{2})$ n'ont pas de pôles en $s = 2, 4, 6, \ldots$ mais ont un pôle en $s = 3, 5, \ldots$

$L(\chi_{-3}, s)$ $\quad \Gamma(\frac{s+1}{2})$ et $\Gamma(\frac{2-s}{2})$ n'ont pas de pôles en $s = 1, 3, 5, 7, \ldots$ mais ont un pôle en $s = 2, 4, 6, \ldots$

<u>Définition</u> : on appelle critiques les entiers n tels que $L_\infty(M, s)$ et et $L_\infty(M, i+1-s)$ n'ont pas de pôle en $s = n$.

[Opération $M \rightsquigarrow M(n)$ sur les motifs
(« twist de Tate ») a pour effet
$$L(M(n), s) = L(M, n+s)$$
et on peut toujours se ramener à $s=0$.]

Conjecture (Deligne) Si n est un entier
critique pour M, alors
$$L(M, n) \in (\text{période}) \cdot \mathbb{Q}$$

et on doit maintenant définir la période.

X lisse sur $\mathbb{Q}$ Betti : $H_i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ classes de
$\sigma : \Delta^i \longrightarrow X(\mathbb{C})$
$H^i_B(X) = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$

de Rham : $H^i_{dR}(X) = \mathbb{H}^i(X, \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X \to \cdots)$

complexe de de Rham algébrique

+ accouplement de périodes
$$H^i_{dR}(X) \otimes H_i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$[\omega] \otimes [\sigma] \longmapsto \int_\sigma \omega$$
que l'on peut aussi voir comme un isomorphisme

de comparaison fonctoriel

comp : $H^i_{dR}(X)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} \longrightarrow H^i_B(X)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$

e.g. $X = \operatorname{Spec} \underbrace{K}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ $\qquad \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C}) = \{\sigma_1,\dots,\sigma_d\}$

matrice de périodes $\left(\sigma_i(\alpha^{j-1})\right)_{i,j=1,\dots d}$

nombres algébriques

Si $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-3} \\ 1 & -\sqrt{-3} \end{pmatrix}$

$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ $\qquad H^2(X) = H^1(\mathbb{G}_m)$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,\infty\}$

et la matrice de périodes est

$$\begin{array}{cc} & \frac{dx}{x} \\ \circlearrowleft & (2\pi i) \end{array}$$

Dans cet exemple on voit que comp est compatible à la conjugaison complexe

$$H^i_{dR}(X)\otimes_{\mathbb{Q}}\underset{z\mapsto\bar z}{\mathbb{C}} \longrightarrow \underset{F_\infty}{H^i_B(X)}\otimes_{\mathbb{Q}}\underset{z\mapsto\bar z}{\mathbb{C}}$$

En effet, $\dfrac{dx}{x}\otimes 1 \longmapsto [\circlearrowleft]\otimes 2\pi i$ et

l'action à droite est $-[\circlearrowleft]\otimes(-2\pi i)$.

(L'effet du twist de Tate sur les périodes est de multiplier par $(2\pi i)^{-n}$.)

Soit $M_B^{\pm} \subseteq M_B$ le sous-espace $\pm$ invariant sous l'action de F_∞. ~~L'hypothèse que 0 est un valeur critique pour M~~ La symétrie de Hodge implique qu'il existe un cran $F^{\pm} M_{dR}$ de la filtration de Hodge et un isomorphisme

$$c^{\pm} : F^{\pm} M_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \longrightarrow M_B^{\pm} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

et on définit $\boxed{c^{\pm}(M) \in \mathbb{R}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}}$ comme le déterminant de c par rapport à des bases naturelles (convention : égal à 1 si $M_B^{+} = 0$). $d^{\pm}(M) = \dim M_B^{\pm}$

Conjecture : si n est entier

$$L(M,n) \in (2\pi i)^{n \cdot d^{(-1)^n}(M)} \cdot c^{(-1)^n}(M) \cdot \mathbb{Q}$$

↑ ne dit pas forcément que la valeur est non nulle !

e.g. $\zeta(n) = L(\mathbb{Q}(0), n)$

valeurs critiques $n = 2, 4, 6, \ldots$ $n = -1, -3$

$d^{+}(M) = 1$ $d^{-}(M) = 0$

$c^{+}(M) = 1$ $c^{-}(M) = 1$

F_∞ agit par $+1$ sur M_B

$\Longrightarrow$ $\zeta(n) \in (2\pi i)^n \mathbb{Q}$ n pair ≥ 2

$\in \mathbb{Q}$ n impair ≤ -1

<u>Remarque</u> : si n est pair négatif, $J(n) = 0$.

Si n est impair positif, $J(n) = \displaystyle\int_{[0,1]^n} \frac{dx_1 \dots dx_n}{1 - x_1 \dots x_n}$

est une période mais <u>pas</u> une période de $\mathbb{Q}(-n)$!

Il faut plutôt regarder des motifs mixtes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(0) \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Q}(-3) \longrightarrow 0$$

ayant matrice de périodes $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{J(3)} \\ 0 & (2\pi i)^3 \end{pmatrix}$. C'est le début des conjectures plus générales comme celle de Bloch–Beilinson...

L'exemple des formes modulaires

Soit $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ une forme modulaire cuspidale de poids k et niveau N

parabolique

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorphe}.$$

$\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad c \equiv 0 \bmod N$$

qui s'annule aux pointes. Une telle fonction admet un développement en série de Fourier

$$f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad q = e^{2\pi i z}$$

et on définit sa fonction L par la formule

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{sur } \boxed{Re(s) > \frac{k}{2}+1}$$

$$= \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{i\infty} f(z)\, z^{s-1}\, dz$$

et cette égalité permet d'étendre L au plan complexe avec équation fonctionnelle pour

$$\Lambda(f,s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\, L(f,s)$$

de la forme

$$\Lambda(f,s) = \pm N^{k/2-s}\,\Lambda(f,k-s) \quad \text{(Hecke)}$$

Les entiers critiques sont $s = 1, \dots k-1$.

Si f a des coefficients a_n dans $\mathbb{Q}$, alors il existe un motif $M(f)$ de rang 2 et de poids $k-1$ tel que

$$\boxed{L(f,s) = L(M(f),s)}$$

et que $\int_0^{i\infty} f(z)\, z^{n-1}\, dz$ est une période de $M(f)$.

Dans les situations les plus simples ($k=2$, coefficients entiers) c'est $H^1(E)$ pour E une forme propre pour les opérateurs de Hecke

multiplicativité des a_n $\leadsto$ produit eulérien courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, comme c'est démontré Eichler–Shimura. Concrètement, pour tout p de bonne réduction

$$a_p = p+1-|E(\mathbb{F}_p)|$$

et $f(z)\,dz$ est le tiré en arrière d'une forme différentielle ω sur E par une application non constante $X_0(N) \xrightarrow{\varphi} E$.

La formule de Hurwitz du début est le cas de la courbe elliptique à multiplication complexe $E : y^2 = 4x^3 - 4x$ et la fonction L s'écrit en terme d'un caractère de Hecke de $K = \mathbb{Q}(i)$.

Demain : conjecture de Deligne

pour $L(\mathrm{Sym}^m f, s)$

si $P_p(f,s) = (1-\alpha_p p^{-s})(1-\beta_p p^{-s})$

alors le facteur local en p est

$$\prod_{i=0}^{m} (1 - \underbrace{\alpha_p^{i} \beta_p^{m-i}}_{\text{monômes de degré } m} p^{-s})$$