

③ FORMES DIFFÉRENTIELLES

Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

Définition. Le module des différentiels de Kähler $\Omega_{B/A}$ est le quotient du B -module libre engendré par les symboles db pour tout $b \in B$ par le sous-module engendré par les éléments

- $d(b+b') - db - db'$
- $d(bb') - b db' - b' db$ (leibniz)
- $d(a)$ pour tout $a \in A$
(les éléments de A sont "constants")

Il est muni de l'application A -linéaire

$$\begin{aligned} d: B &\longrightarrow \Omega_{B/A} \\ b &\longmapsto db \end{aligned}$$

qui est universelle au sens suivant:

soit $D: B \rightarrow M$ une A -dérivation, alors il existe un unique morphisme de B -modules dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{d} & \Omega_{B/A} \\
 & \searrow D & \swarrow \text{---} \\
 & M &
 \end{array}$$

Proposition. Soit C une courbe projective lisse, soit P un point de C et soit π une uniformisante en P . Alors

$\Omega_{\mathcal{O}_P/\bar{k}}$ est un $\mathcal{O}_P$ -module libre de rang 1, engendré par $d\pi$

Définition. Soit C une courbe projective lisse. on appelle espace de formes différentielles régulières sur C

$$\Omega_C = \Omega_{\bar{k}(C)/\bar{k}}$$

le module des différentiels de Kähler est compatible à la localisation

$$\Omega_{B/A} \otimes_B \bar{S}^1 B \cong \bar{S}^1 \Omega_{B/A} \cong \Omega_{\bar{S}^1 B/A}$$

pour toute partie multiplicative S de B (e.g. les éléments non nuls si B est intègre).

De la proposition on déduit donc que Ω_C est un $\bar{K}(C)$ -espace vectoriel de dimension 1.

le diviseur d'une forme différentielle

Soient $w \in \Omega_C$ une forme différentielle non nulle et $P \in C(\bar{K})$. Choisissons une uniformisante t en P . Il existe $g \in \bar{K}(C)^\times$ telle que

$$w = g \cdot dt$$

L'entier $\text{ord}_P(w) = \text{ord}_P(g)$ ne dépend du choix de l'uniformisante. En effet, si t' est une autre uniformisante

$dt' \in \mathcal{O}_P dt$ et $dt \in \mathcal{O}_P dt'$, ce qui entraîne $dt' \in \mathcal{O}_P^\times dt$. Donc, si l'on écrit $w = g' dt'$, les fonctions g et g' diffèrent par un élément de $\mathcal{O}_P^\times$, d'où $\text{ord}_P(g) = \text{ord}_P(g')$.

Fait: Pour toute $w \in \Omega_C \setminus \{0\}$, l'ensemble des points $P \in C(\bar{K})$ où $\text{ord}_P(w) \neq 0$ est

fini. on peut donc poser

$$\operatorname{div}(w) = \sum_{P \in C(\bar{k})} \operatorname{ord}_P(w) \cdot [P],$$

le diviseur de la forme différentielle w .

Définition. on appelle diviseur canonique de la courbe C la classe dans $\operatorname{Pic}(C)$ de $\operatorname{div}(w)$ pour toute forme différentielle non nulle $w \in \Omega_C \setminus \{0\}$.

En effet, cette classe est indépendante du choix de w car

$$\operatorname{div}(fw) = \operatorname{div}(w) + \operatorname{div}(f)$$

pour tout $f \in \bar{k}(C)^\times$.

Définition. Soit C une courbe projective et lisse définie sur k . on appelle genre de C l'entier

$$g(C) = h(K_C) = \dim_{\bar{k}} \mathcal{L}(K_C)$$

Remarque: on dit qu'une forme différentielle $w \in \Omega_C^1$ est régulière ou holomorphe

si $\text{ord}_P(w) \geq 0$ pour tout point $P \in C(\bar{K})$.

Une fonction f dans $\mathcal{L}(K_C)$ a la propriété

$$\text{div}(f) \geq -\text{div}(w),$$

c'est-à-dire $\text{div}(fw) \geq 0$, c'est-à-dire

fw est holomorphe. Réciproquement, si fw

est holomorphe, alors $f \in \mathcal{L}(K_C)$. On a

donc une isomorphisme de $\bar{K}$ -vecteurs

$$\mathcal{L}(K_C) \simeq \{w \in \Omega_C \mid w \text{ holomorphe}\}$$

Exemple: Soit $C = \mathbb{P}^1$ la droite projective,
et soit t une coordonnée sur la carte affine
contenant $0 \in C(K)$. Alors

$$\text{div}(dt) = -2[\infty]$$

En effet, en tout point $P \in C(\bar{K})$ différent
de l'infini, m_P est l'idéal engendré par
 $t - P$ et $dt = d(t - P)$, d'où

$$\text{ord}_P(dt) = 0.$$

À l'infini, une coordonnée est la
coordonnée $u = 1/t$ sur la carte affine
contenant ∞ et $dt = -t^{-2} du$, d'où

$$\text{ord}_\infty(dt) = -2.$$

on a donc $K_C = -2[\infty]$ et comme K_C

a degré $-2 < 0$, on en déduit qu'il n'y a pas de différentielles holomorphes sur $\mathbb{P}^1$.

C'est-à-dire $\mathbb{P}^1$ est une courbe de genre $g(C) = 0$.

Exemple: Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et $e_1, e_2, e_3 \in \bar{K}$ distincts. Soient $C \subset \mathbb{P}^2$ la courbe

$$Y^2 Z = (X - e_1 Z)(X - e_2 Z)(X - e_3 Z)$$

C'est une courbe projective lisse qui passe par les points $P_i = [e_i : 0 : 1]$ pour $i=1, 2, 3$ et $\infty = [0 : 1 : 0]$, le seul point dans le complémentaire de la carte affine

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

où $y = \frac{Y}{Z}$ et $x = \frac{X}{Z}$. Calculons les

diviseurs des fonctions $x - e_i$ et y .

Regardons $P_1 = [e_1: 0: 1]$. L'idéal m_{P_1} est engendré par $X - e_1 z$ et Y car ces fonctions appartiennent à m_{P_1} et $\langle X - e_1 z, Y \rangle \subset \bar{K}[C]$ est un idéal maximal. En utilisant l'équation de la courbe on a

$$\begin{aligned} (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(X - e_1 z) z^2 \\ = z Y^2 - (X - e_1 z)^3 - (2e_1 - e_2 - e_3)(X - e_1 z)^2 z \end{aligned}$$

et comme $(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \neq 0$ et z ne s'annule pas en $P_1 = [e_1: 0: 1]$, on trouve $X - e_1 z \in m_{P_1}^2$ et Y est une uniformisante en P_1 . On a aussi:

$$\text{ord}_{P_1}(X - e_1 z) = \min(\text{ord}_{P_1}(Y), 2 \text{ord}_{P_1}(X - e_1 z), 3 \text{ord}_{P_1}(X - e_1 z))$$

$$\text{d'où } \text{ord}_{P_1}(X - e_1 z) = 2 \text{ord}_{P_1}(Y) = 2$$

De même, $\text{ord}_{P_i}(X - e_i z) = 2$ pour $i=2, 3$.

Soit maintenant $\infty = [0:1:0]$. L'idéal m_∞ est engendré par X et Z (regarder la carte affine d'équation

$$z = (X - e_1 z)(X - e_2 z)(X - e_3 z),$$

donc $X - e_1 z \in m_\infty$. Comme

$$y^2 z = (X - e_1 z)(X - e_2 z)(X - e_3 z)$$

et que $y \notin m_\infty$, on trouve $z \in m_\infty^3$,

donc m_∞/m_∞^2 est engendré par X et

$\text{ord}_\infty(X) = 1$, donc $\text{ord}_\infty(z) = 3$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{ord}_\infty(X - e_i z) &= \min(\text{ord}_\infty(X), \text{ord}_\infty(z)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \text{div}(X - e_i) &= \text{div}\left(\frac{X - e_i z}{z}\right) \\ &= \text{div}(X - e_i z) - \text{div}(z) \\ &= 2[P_i] - 2[\infty] \end{aligned}$$

$$\text{et } \text{div}(y^2) = 2[P_1] + 2[P_2] + 2[P_3] - 6[\infty],$$

$$\text{d'où } \boxed{\text{div}(y) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[\infty]}$$

Calculons maintenant le diviseur de la forme différentielle dx .

* En tout point $P = [x_0 : y_0 : 1]$ avec $x_0 \neq e_i$ pour $i=1, 2, 3$, la fonction $x - x_0$ est une uniformisante et $dx = d(x - x_0)$, d'où $\text{ord}_P(dx) = 0$.

* En P_i , on a en fait $\text{ord}_{P_i}(x - e_i) = 2$, donc en écrivant $x - e_i$ en terme d'une uniformisante t en P_i on trouve $\text{ord}_{P_i}(dx) = 1$

* Comme $\text{ord}_\infty(x) = \text{ord}_\infty\left(\frac{X}{Z}\right) = -2$, on a $\text{ord}_\infty(dx) = \text{ord}_\infty\left(-x^2 d\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \text{ord}_\infty\left(-2t^3 d\left(\frac{1}{t}\right)\right) = -3$

si $1/t$ désigne une uniformisante en ∞ .

Conclusion:

$$\begin{aligned}\text{div}(dx) &= [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[\infty] \\ &= \text{div}(y)\end{aligned}$$

c'est-à-dire $w = \frac{dx}{y}$ est une forme différentielle holomorphe et sans zéros sur C . Par conséquent, $g(C) = 1$.

Théorème de Riemann-Roch:

Soit C une courbe projective lisse définie sur k . Alors

$$l(D) - l(K_C - D) = \deg D + 1 - g(C)$$

pour tout diviseur D sur C .

Quelques conséquences immédiates

1) En faisant $D = K_C$,

$$l(K_C) - l(0) = \deg K_C + 1 - g(C)$$

$\parallel$ $\parallel$
 $g(C)$ 1

on trouve $\deg K_C = 2g(C) - 2$

2) Si $\deg D > 2g(C) - 2$, alors

$l(K_C - D)$ a degré < 0 et donc

$$l(D) = \deg D - g(C) + 1$$