

① COURBES PROJECTIVES LISSES

Dans ce cours, on va travailler sur

$K$  corps parfait

(i.e. tout polynôme irréductible est séparé

$\Leftrightarrow \text{car } K=0 \text{ ou } \text{car } K=p>0 \text{ et}$

$x \mapsto x^p$  est un automorphisme)

$\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$

$\text{Gal}(\bar{K}/K)$  le groupe de Galois

### Rappel

À un idéal  $I \subset \bar{K}[X_0, \dots, X_n]$  engendré par des polynômes homogènes, on associe

$$V(I) = \{P \in \mathbb{P}^n(\bar{K}) \mid f(P) = 0 \text{ pour tout } f \in I \text{ homogène}\} \subset \mathbb{P}^n(\bar{K}),$$

et à un sous-ensemble algébrique  $V \subset \mathbb{P}^n(\bar{K})$ , on associe l'idéal

$$I(V) = \text{engendré par } f \in \bar{K}[X_0, \dots, X_n] \text{ homogène tel que } f(P) = 0 \text{ pour tout } P \in V$$

On dit que  $V$  est définie sur  $K$  si  $I(V)$  peut être engendré par des polynômes à

coefficients dans  $k$ . Dans ce cas,

$$V(k) = V \cap \mathbb{P}^n(k)$$

$$= \{P \in V \mid \sigma(P) = P \text{ pour tout } \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)\}$$

On dit que  $V$  est une variété projective si l'idéal  $I(V)$  est premier.

Soit  $V \subset \mathbb{P}^n(\bar{k})$  une variété projective définie sur  $k$ . Soit  $A^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  une copie de l'espace affine telle que  $V \cap A^n \neq \emptyset$ .

Le corps de fonctions de  $V$  est

$$\bar{k}(V) = \text{corps de fonctions de } V \cap A^n$$

$$\text{Frac} \left( \frac{\bar{k}[X_1, \dots, X_n]}{I(V \cap A^n)} \right)$$

et la dimension de  $V$  est le degré de transcendance de  $\bar{k}(V)$ .

Si  $V$  est définie sur  $k$ , alors le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit sur  $\bar{k}(V)$  et on définit

$$\begin{aligned} k(V) &= \bar{k}(V)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &= \text{Frac} \left( \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I(V \cap A^n/k)} \right) \end{aligned}$$

Cette action satisfait à

$$\sigma(f(P)) = \sigma(f)(\sigma(P))$$

on peut aussi définir  $\bar{k}(V)$  comme  
les fractions rationnelles  $\frac{f(X_0, \dots, X_n)}{g(X_0, \dots, X_n)}$

avec  $f$  et  $g$  homogènes du même degré,

$$g \notin I(V) \text{ et } \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \Leftrightarrow f_1 g_2 - f_2 g_1 \in I(V)$$

Pour chaque point  $P \in V(\bar{k})$ , on a

$$m_P \subset \mathcal{O}_{V,P} \subset \bar{k}(V)$$

↑  
l'idéal maximal  
des fonctions régulières  
s'annulent en  $P$

↙ l'anneau local des  
fonctions régulières  
en  $P$  (= localisation  
en l'idéal  $m_P$ )

Définition. Une courbe projective lisse  
est une variété projective lisse de  
dimension 1 telle que

$$\dim_{\bar{k}} m_P / m_P^2 = 1$$

pour tout point  $P \in C(\bar{k})$ .

on appelle unificateur en  $P$  un générateur  
t de  $m_P/m_P^2$ , c'est-à-dire une forme qui  
s'annule à l'ordre 1 en  $P$ .

## ② DIVISEURS

Définition. Soit  $C$  une courbe projective lisse définie sur  $k$ . Un diviseur sur  $C$  est une somme formelle

$$D = \sum_{P \in C(\bar{k})} n_P \cdot [P]$$

avec  $n_P \in \mathbb{Z}$  et  $n_P = 0$  pour presque tout point  $P$ . On note

$$\text{Div}(C)$$

le groupe abélien des diviseurs, c'est-à-dire le groupe abélien libre de base  $C(\bar{k})$ .

le degré d'un diviseur  $D$  est l'entier

$$\deg D = \sum_{P \in C(\bar{k})} n_P \in \mathbb{Z}$$

On note  $\text{Div}^0(C) \subset \text{Div}(C)$  le sous-groupe formé des diviseurs de degré 0.

le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit

sur les diviseurs par la formule

$$\sigma(D) = \sum_{P \in C(\bar{K})} n_P \cdot [\sigma(P)]$$

pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$ .

Définition. on dit qu'un diviseur  $D$  est défini sur  $K$  si

$$\sigma(D) = D \quad \text{pour tout } \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$$

Par exemple,  $D = \sum_{P \in C(\bar{K})} n_P [P]$  est défini

sur  $K$  si les  $P$  pour lesquels  $n_P \neq 0$  sont dans  $C(K) \subset C(\bar{K})$ , mais ce n'est pas nécessaire: pour la courbe  $C = \mathbb{P}^1$  sur  $K = \mathbb{Q}$ , le diviseur  $[\sqrt{2}] + [-\sqrt{2}]$  est défini sur  $K$ , même si  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$  sont des points dans  $C(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \setminus C(\mathbb{Q})$ .

Définition. Un diviseur  $D = \sum_{P \in C(\bar{K})} n_P [P]$  est effectif si  $n_P \geq 0$  pour tout  $P$ .  
on écrit alors  $D \geq 0$ .

Cela définit une relation d'ordre partielle sur le groupe des diviseurs :

$$D_1 \geq D_2 \iff D_1 - D_2 \geq 0$$

c'est-à-dire,  $D_1 - D_2$   
est effectif

### le diviseur d'une fonction

Soit  $C$  une courbe projective lisse sur  $K$  et soit  $P \in C(\bar{K})$  un point.

on définit une valuation discrète sur l'anneau local de  $C$  en  $P$

$$\text{ord}_P : \mathcal{O}_P \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$f \longmapsto \max \{d \mid f \in \mathfrak{m}_P^d\}$$

et on l'étend à son corps de fractions

$$\bar{K}(C) = \text{Frac}(\mathcal{O}_P)$$

à travers la formule

$$\text{ord}_P \left( \frac{f}{g} \right) = \text{ord}_P(f) - \text{ord}_P(g)$$

pour obtenir

$$\text{ord}_P: \bar{K}(C) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

Rappelons qu'une valuation discrète est une application  $v: R \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  qui satisfait aux conditions:

- $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$
- $v(x) = \infty \iff x = 0$

\* Si  $\text{ord}_P(f) \geq 0$ , alors  $f$  est régulière en  $P$  et on peut évaluer  $f(P) \in \bar{K}$ .

\* Si  $\text{ord}_P(f) > 0$ , alors  $f$  a un zéro d'ordre  $\text{ord}_P(f)$  en  $P$ .

\* Si  $\text{ord}_P(f) < 0$ , alors  $f$  a un pôle d'ordre  $-\text{ord}_P(f)$  en  $P$ . on écrit dans ce cas  $f(P) = \infty$ .

Fait: Soit  $f \in \bar{K}(C)^\times$ . Alors il n'y a qu'un nombre fini de points  $P \in C(\bar{K})$



où  $\text{ord}_p(f) \neq 0$ . Si  $f$  n'a pas de pôles, alors  $f \in \bar{k} \subset \bar{k}(C)$ .

Définition: Soit  $f \in \bar{k}(C)^\times$ . le diviseur de  $f$  est donné par

$$\text{div}(f) = \sum_{P \in C(\bar{k})} \text{ord}_P(f) \cdot [P]$$

Proposition:  $\deg(\text{div}(f)) = 0$

c'est-à-dire une fonction  $f$  a le même nombre de zéros et de pôles comptés avec multiplicité.

Le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit de façon compatible sur les diviseurs et sur les fonctions en ce sens que

$$\text{div}(\sigma(f)) = \sigma(\text{div} f).$$

En particulier, si  $f \in k(C) \subset \bar{k}(C)$  est définie sur  $k$ , alors son diviseur  $\text{div}(f)$  est défini sur  $k$ .

Remarque: la notation  $\text{div}(f)$  et la relation  $\geq 0$  permet d'exprimer de manière concise des propriétés sur les zéros et les pôles d'une fonction, e.g.

$$\text{div}(f) \geq -n [P]$$

signifie que  $f$  est régulière en dehors de  $P$  et a un pôle d'ordre  $\leq n$  en  $P$ .

Définition. Soit  $D$  un diviseur sur  $C$ .  
on définit le  $\bar{k}$ -espace vectoriel

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \bar{k}(C)^\times \mid \text{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}$$

lemme. Soit  $C$  une courbe projective lisse. Alors  $\mathcal{L}(D)$  est de dimension finie.

Démonstration: Si  $D_1 \leq D_2$ , alors la condition  $\text{div}(f) \geq -D_1$  impli que la condition  $\text{div}(f) \geq -D_2$ , d'où

$$\mathcal{L}(D_1) \subset \mathcal{L}(D_2).$$

Il suffit donc de démontrer l'ennée pour les diviseurs effectifs  $D \geq 0$ .

Plus précisément, nous allons démontrer

$$\dim_{\bar{k}} \mathcal{L}(D) \leq \deg D + 1$$

par récurrence sur le degré de  $D$ .

1) Si  $D = 0$ , alors  $\mathcal{L}(D)$  est réduit aux fonctions constantes  $\bar{k}$ .

2) Si  $D \neq 0$ , alors il existe un point  $P \in C(\bar{k})$  tel que  $D - [P] \geq 0$ .

Si  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - [P])$ , on applique l'hypothèse de récurrence.

Si non, soit  $t$  un uniformisante en  $P$  (c'est-à-dire un générateur de  $\mathfrak{m}_P$ ).

Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D) &\longrightarrow \bar{k} \\ g &\longmapsto (t^{n_P} g)(P) \end{aligned}$$

est surjective (car il existe une fonction  $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \mathcal{L}(D - [P])$  et que cette fonction ne s'annule pas en  $P$ ) de l'espace  $\mathcal{L}(D - [P])$ , d'où

$$\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - [P]) \oplus \bar{k} \cdot f,$$

ce qui finit la démonstration par récurrence.  $\square$

Définition:  $\mathcal{L}(D) = \dim_{\bar{k}} \mathcal{L}(D)$

Remarques:

1) Si  $\deg D < 0$ , alors le degré de  $\operatorname{div} f + D$  est aussi  $< 0$  et donc  $\mathcal{L}(D) = \{0\}$  et  $\mathcal{L}(D) = 0$ .

2) Pour tout  $g \in \bar{k}(C)^{\times}$ , on a

$$\operatorname{div}(f) \geq -D - \operatorname{div}(g)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)}_{\operatorname{div}(fg)} \geq -D,$$

d'où une bijection

$$\mathcal{L}(D + \operatorname{div}(g)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(D)$$

$$f \longmapsto fg$$

Il s'ensuit que l'espace  $\mathcal{L}(D)$  ne dépend que de l'image de  $D$  dans

## le groupe de Picard

$$\text{Pic}(C) = \text{coker} \left( \begin{array}{ccc} \bar{k}(C)^{\times} & \longrightarrow & \text{Div}(C) \\ f & \longmapsto & \text{div}(f) \end{array} \right)$$

lemme. Si  $D$  est définie sur  $k$ , alors  $k(D)$  admet une base de fonctions définies sur  $k$ , i.e. dans  $k(C) \subset \bar{k}(C)$ .

Démonstration. le résultat découle du lemme d'algèbre semi-linéaire suivant.

lemme. Soit  $V$  un  $\bar{k}$ -espace vectoriel muni d'une action continue semi-linéaire de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ , c'est-à-dire satisfaisant

a) pour tout  $v \in V$ ,

$$\{ \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k) \mid \sigma(v) = v \}$$

est un sous-groupe d'indice fini de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  (continue)

b)  $\sigma(\lambda v) = \sigma(\lambda) \sigma(v)$  pour tous

$\lambda \in \bar{k}$ ,  $v \in V$ ,  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ .

Soit  $V^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = \{ v \in V \mid \sigma(v) = v \text{ pour tout } \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k) \}$

Alors l'application

$$V^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \otimes_k \bar{k} \xrightarrow{\sim} V$$

$$v \otimes 1 \longmapsto v$$

est un isomorphisme de  $\bar{k}$ -vecteurs.

Démonstration: Il suffit de montrer que tout élément de  $V$  est une combinaison  $\bar{k}$ -linéaire d'éléments de  $V^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ .

Soit  $v \in V$ . Comme

$$H = \{ \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k) \mid \sigma(v) = v \}$$

est d'indice fini dans  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ , son corps fixe  $\bar{k}^H$  est une extension finie de  $k$ . Notons  $L$  sa clôture galoisienne dans  $\bar{k}$ . Prenons

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  base de  $L$  sur  $k$

$$\{ \sigma_1, \dots, \sigma_n \} = \text{Gal}(L/k)$$

les éléments

$$w_i = \sum_{j=1}^n \sigma_j(\alpha_i v) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(\alpha_i) \sigma_j(v)$$

satisfait à

$$\sigma(w_i) = \sum_{j=1}^n (\sigma \sigma_j)(\alpha_i v) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(\alpha_i v)$$

pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$  car  $L/k$  est une extension galoisienne, d'où  $w_i \in V^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ .

Comme la matrice  $(\sigma_j(\alpha_i))_{i,j=1,\dots,n}$  est inversible, tout  $\sigma_j(v)$  et en particulier  $v$  s'écrit comme une combinaison linéaire des  $w_i \in V^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ .  $\square$

On applique le lemme de la manière suivante. Si  $f \in \mathcal{L}(D)$ , alors

$$\sigma(f) \in \mathcal{L}(\sigma(D)) = \mathcal{L}(D)$$

↑  
si  $D$  est défini  
sur  $k$

et donc le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit sur  $\mathcal{L}(D)$ . Cette action est continue et semi-linéaire en tant que restriction de celle sur  $\bar{k}(C)$ . On prend alors une base de  $\mathcal{L}(D)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \subset k(C) = \bar{k}(C)$ .  $\square$