

① FONCTIONS ELLIPTIQUES

Définition. Un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ est un sous-groupe discret qui admet une $\mathbb{R}$ -base de $\mathbb{C}$. Il est donc de la forme

$$\Lambda = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2,$$

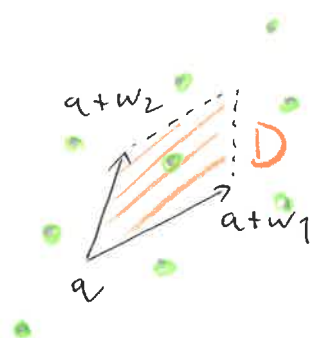
où w_1 et w_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$.

Définition. Un domaine fondamental pour un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ de la forme

$$D = \{a + t_1 w_1 + t_2 w_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$$

pour $a \in \mathbb{C}$. Il contient un unique représentant de chaque point de $\mathbb{C}$ pour la relation d'équivalence

$$z \sim z' \iff z - z' \in \Lambda$$



Définition. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un réseau. Une fonction elliptique par rapport à Λ est une fonction méromorphe

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

telle que $f(z+w) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $w \in \Lambda$.

On note $\mathbb{C}(\Lambda)$ l'ensemble de ces fonctions. C'est un corps.

Remarque. Si f n'a pas de pôles, alors f est constante. En effet, soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine fondamental. En utilisant que f est Λ -périodique,

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \sup_{z \in \bar{D}} |f(z)| < +\infty$$

$\bar{D}$ est compact

Par le théorème de Liouville, une fonction holomorphe bornée est constante.

De même, si f n'a pas de zéros, alors $\frac{1}{f}$ n'a pas de pôles, donc f est constante.

(2)

Théorème. Soient $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un réseau, $D \subseteq \mathbb{C}$ un diviseur fondamental et $f \in \mathbb{C}(\Lambda)^{\times}$.

$$(1) \sum_{x \in D} \text{res}_x(f) = 0$$

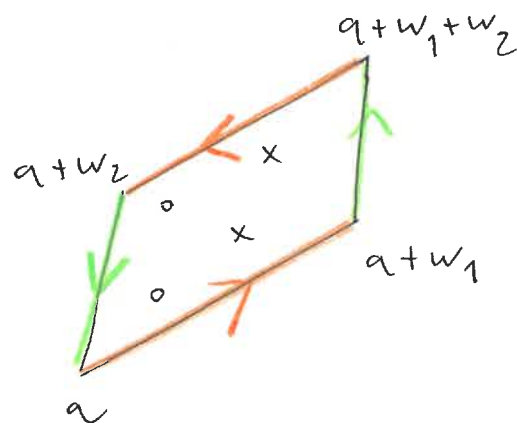
$$(2) \sum_{x \in D} \text{ord}_x(f) = 0$$

$$(3) \sum_{x \in D} \text{ord}_x(f) \cdot x \in \Lambda$$

Démonstration. Ces propriétés sont indépendantes du choix de D car on peut les écrire sous la forme $\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \dots$. Comme Λ et l'ensemble des zéros et des pôles de f sont discrets, on peut choisir D de sorte que f n'ait pas de pôles ni des zéros sur ∂D .

(1) Par le théorème du résidu,

$$\sum_{x \in D} \text{res}_x(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz$$



$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_a^{a+w_1} f(z) dz + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} f(z) dz + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} f(z) dz + \int_{a+w_2}^a f(z) dz \right) = 0$$

$$\text{car } \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} f(z) dz = - \int_a^{a+w_1} f(z+w_2) dz = - \int_a^{a+w_1} f(z) dz$$

↑
périodicité

et de même pour les deux autres termes.

(2) Si f est elliptique, alors $\frac{f'}{f}$ est elliptique aussi avec

$$v_x \left(\frac{f'}{f} \right) = v_x(f),$$

donc le résultat découle de (1).

(3) Par le théorème du résidu,

$$\sum_{x \in D} v_x(f) \cdot x = \sum_{x \in D} v_x \left(z \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

cette fraction
n'est pas elliptique

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_a^{a+w_1} + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} + \int_{a+w_2}^a \right) \\
 &= \frac{w_1}{2\pi i} \int_a^{a+w_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{w_2}{2\pi i} \int_a^{a+w_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Pour conclure, on utilise le fait que pour tout chemin fermé γ sur $\mathbb{C}^*$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}.$$

On l'applique au chemin

$$\begin{aligned}
 \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\
 t &\longmapsto f((1-t)a + t(a+w_2))
 \end{aligned}$$

qui est bien défini car f n'a pas de zéros sur ∂D et fermé car $f(a) = f(a+w_2)$. $\square$

Corollaire. Une fonction elliptique non constante a au moins 2 pôles (comptés avec multiplicité) sur D .

Démonstration: S'il y avait un seul

pôle simple, (1) impliquant que le résidu est 0, donc que la fonction est holomorphe, donc qu'elle est constante $\square$

le quotient $E = \mathbb{C}/\Lambda$ est muni d'une structure de surface de Riemann. Une fonction elliptique $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définit par passage au quotient une fonction holomorphe $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dans ce langage, les énoncés (1) et (2) sont le théorème des résidus pour la forme différentielle méromorphe $f(z)dz$ sur la surface de Riemann compacte E et le fait qu'une fonction non nulle a autant de pôles que de zéros.

② LA FONCTION $\wp$ DE WEIERSTRASS

Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un réseau. On pose:

$$G_{2k}(\Lambda) = \sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \frac{1}{w^{2k}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{série} \\ \text{d'Eisenstein} \\ \text{de poids } 2k \end{array}$$

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

fonction $\wp$
de Weierstrass

Proposition

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} G_{2k}$ converge absolument pour tout entier $k > 1$
- (2) $\wp_{\Lambda}$ converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$
- (3) $\wp_{\Lambda}$ est une fonction elliptique paire:

$$\wp_{\Lambda}(-z) = \wp_{\Lambda}(z)$$

avec un pôle double avec résidu 0 sur tout élément de Λ et pas d'autres pôles.

Démonstration:

$$(1) \sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \frac{1}{|w|^{2k}} = \sum_{0 < |w| < 1} \frac{1}{|w|^{2k}} + \sum_{|w| \geq 1} \frac{1}{|w|^{2k}}$$

↑
somme finie car Λ
est discret

$$\sum_{\substack{w \in \Lambda \\ |w| \geq 1}} \frac{1}{|w|^{2k}} \leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\{w \in \Lambda \mid N \leq |w| < N+1\}|}{N^{2k}}$$

$$\leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{C}{N^{2k-1}} < \infty$$

$\uparrow$
 $k > 1$

car $|\{w \in \Lambda \mid N \leq |w| < N+1\}| \leq C \cdot N$ pour une constante C indépendante de N .

(2) Pour $z \in \mathbb{C}$, on écrit

$$P_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \in \Lambda \setminus \{0\} \\ |w| \leq |2z|}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

$$+ \sum_{\substack{w \in \Lambda \setminus \{0\} \\ |w| > |2z|}} \dots$$

$\uparrow$ somme finie de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$

Si $|w| > |2z|$, alors

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| = \left| \frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2} \right| \leq 10 \frac{|z|}{|w|^3}$$

$\uparrow$

$$|z-w| \geq \frac{|w|}{2}$$

$$|2w-z| \leq \frac{5}{2} |w|$$

et on déduit le résultat en utilisant l'argument de la partie (1).

(3) La propriété $\wp_{\Lambda}(-z) = \wp_{\Lambda}(z)$ est évidente à partir de la définition (en changeant $w \in \Lambda$ en $-w \in \Lambda$).

En dérivant,

$$\wp'_{\Lambda}(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$$

converge
uniforme

on trouve une fonction elliptique. En intégrant $\wp'_{\Lambda}(z+w) = \wp'_{\Lambda}(z)$, on trouve

$$\wp_{\Lambda}(z+w) = \wp_{\Lambda}(z) + C(w)$$

constante indépendante de z

En évaluant en $z = -\frac{w_1}{2}$ et $z = -\frac{w_2}{2}$, qui ne sont pas des pôles de $\wp_{\Lambda}$, on trouve $C(w) = 0$ pour tout $w \in \Lambda$ $\square$