ARITHMÉTIQUE DES COURBES ELLIPTIQUES
FEUILLE DE TD 3

Exercice 1 (Examen 2024)**.** Soient k un corps algébriquement clos et C une courbe projective lisse de genre g sur k munie d'un k-point $\mathrm{O} \in \mathrm{C}(k)$. Considérons l'application d'Abel–Jacobi

$$\begin{aligned} \mathrm{AJ_C} \colon \mathrm{C}(k) &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(\mathrm{C}) \\ \mathrm{P} &\longmapsto \text{classe de } [\mathrm{P}] - [\mathrm{O}]. \end{aligned}$$

(1) Démontrer que si $\mathrm{AJ_C}$ est l'application nulle, alors $g = 0$.

(2) Démontrer que si $g \geq 1$, alors l'application $\mathrm{AJ_C}$ est injective.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que l'application $\mathrm{AJ_C}$ est non nulle et surjective.

(3) Démontrer que tout diviseur D de degré $d \geq 1$ sur C est linéairement équivalent à un diviseur effectif. En déduire que l'espace L(D) est non nul.

(4) Soit D un diviseur de degré $d \geq 2$ sur C, soit $f \in \mathrm{L(D)}$ une fonction non nulle et soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{C}(k)$ un point qui n'est pas un zéro de f. Décrire le sous-espace $\mathrm{L(D - [Q])}$ de L(D).

(5) Soit D un diviseur de degré $d \geq 1$ sur C. Démontrer l'inégalité $l(\mathrm{D}) \geq d$.

(6) Conclure que si $g \geq 2$ l'application d'Abel–Jacobi n'est pas surjective.

Exercice 2. Calculer un représentant du diviseur canonique de la courbe projective lisse

$$\mathrm{C} = \{[x \colon y \colon z] \in \mathbb{P}^2 \mid x^5 + y^5 = z^5\}.$$

Exercice 3. Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $f(x) \in k[x]$ un polynôme de degré d sans racine double. On considère la courbe affine $\mathrm{C_0}$ définie sur k d'équation

$$\mathrm{C_0} \colon y^2 = f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0$$

(1) Démontrer que $\mathrm{C_0}$ est lisse.

(2) On considère la clôture projective $\overline{\mathrm{C_0}}$ de $\mathrm{C_0}$ dans $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire

$$\overline{\mathrm{C_0}} \colon y^2 z^{d-2} = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} z + \cdots + a_d z^d$$

Démontrer que le point à l'infini $[0 \colon 1 \colon 0]$ de $\overline{\mathrm{C_0}}$ est singulier si $d \geq 1$.

Supposons dorénavant que $d = 4$.

(3) Considérons le morphisme $\mathrm{C_0} \to \mathbb{P}^3$ donné par

$$(x, y) \longmapsto [1 \colon x \colon y \colon x^2]$$

et la clôture $\mathrm{C} \subset \mathbb{P}^3$ de son image. Soit H l'hyperplan de $\mathbb{P}^3$ défini par l'équation $\mathrm{X_0} = 0$. Démontrer que C est lisse.

(4) Démontrer que $\mathrm{C} \cap (\mathbb{P}^3 \setminus \mathrm{H})$ et isomorphe à $\mathrm{C_0}$.

(5) Démontrer que $(\mathrm{C} \cap \mathrm{H})(k)$ est soit vide si a_d n'est pas un carré dans k, soit formée des deux points $[0 \colon 0 \colon \pm\sqrt{a_d} \colon 1]$ si a_d est un carré.

(6) Démontrer que

$$\mathrm{C} = \{[x\colon y\colon z\colon t] \in \mathbb{P}^3 \colon y^2 = -x^4 - 1 \ z = x^2\}$$

est une courbe projective lisse de genre 1 sur $\mathbb{Q}$ qui n'est pas une courbe elliptique.

Exercice 4. Soit k un corps. Considérons une équation de Weierstrass

$$(\mathrm{W})\colon y^2 = x^3 + ax + b,$$

avec $a, b \in k$ et définissons le *discriminant* comme

$$\Delta = -16(4a^3 + 27b^2).$$

(1) Démontrer que (W) définit une courbe projective lisse si et seulement si $\Delta \neq 0$.

Si $\Delta \neq 0$, on définit le *j-invariant* par la formule

$$j = -1728\frac{(4\mathrm{A})^3}{\Delta}.$$

(1) Démontrer que si k est algébriquement clos, alors deux équations de Weierstrass ayant le même j-invariant définissent des courbes elliptiques isomorphes.
(2) Soit $j_0 \in \overline{k}$. Démontrer qu'il existe une équation de Weierstrass définie sur $k(j_0)$ ayant j-invariant égal à j_0.

Exercice 5. Soit E la courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ d'équation affine

$$y^2 = x^3 + 17.$$

(1) Vérifier que les points suivants sont dans $\mathrm{E}(\mathbb{Q})$:

$$\mathrm{P}_1 = (-2, 3), \quad \mathrm{P}_2 = (-1, 4), \quad \mathrm{P}_3 = (2, 5), \quad \mathrm{P}_4 = (4, 9), \quad \mathrm{P}_5 = (8, 23)$$

En trouver d'autres !
(2) Vérifier les relations

$$2\mathrm{P}_2 = \big(\frac{137}{64}, -\frac{2651}{512}\big), \quad \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_3 = \big(-\frac{8}{9}, -\frac{109}{27}\big).$$