ARITHMÉTIQUE DES COURBES ELLIPTIQUES
FEUILLE DE TD 2

Soit k un corps algébriquement clos.

Exercice 1. Soit F un corps de fonctions sur k d'une variable et X la courbe projective lisse associée. Montrer les faits suivants :

(1) Pour tout $x \in \mathrm{X}$, le corps résiduel en x est k.

(2) Pour tout $f \in \mathrm{F} \smallsetminus k$, l'extension $k(f) \subset \mathrm{F}$ est finie.

Exercice 2. Soit $\pi \colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme non constant entre courbes projectives lisses sur k. Pour tout diviseur $\mathrm{D} = \sum m_x x$ sur X on pose

$$\pi^*\mathrm{D} := \sum_{\pi(y)=x} \mathrm{ord}_y(\pi) m_x y$$

où $\mathrm{ord}_y(\pi)$ est l'ordre de ramification de π en y. Pour tout diviseur $\mathrm{D} = \sum m_y y$ sur Y on pose

$$\pi_*\mathrm{D} := \sum_{x \in \mathrm{X}} \left(\sum_{\pi(y)=x} m_y \right) x.$$

Montrer les faits suivants :

(1) Pour tout diviseur D sur X on a $\deg(\pi^*\mathrm{D}) = \deg \pi . \deg \mathrm{D}$.

(2) Pour tout diviseur D sur Y on a $\deg(\pi_*\mathrm{D}) = \deg \mathrm{D}$.

(3) Soit f une fonction méromorphe sur X non identiquement nulle. Alors

$$\pi^* \operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(\pi^* f),$$

et en déduire que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

(4) Soit f une fonction méromorphe sur Y non identiquement nulle. Alors

$$\pi_* \operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(\mathrm{N}(f)),$$

où $\mathrm{N}(f)$ est la norme de f par rapport à l'extension $k(\mathrm{X}) \subset k(\mathrm{Y})$.

Exercice 3. Soit B une algèbre sur un anneau A. Montrer les faits suivants :

(1) Si B est une localisation ou un quotient de A, on a $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} = 0$.

(2) Pour toute A-algèbre A′ on a $\Omega^1_{\mathrm{B}'/\mathrm{A}'} \cong \Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{B}'$ où $\mathrm{B}' = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$.

(3) Soit $\mathrm{B} \to \mathrm{C}$ un morphisme de A-algèbres. Alors on a suite exacte

$$\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{C} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{C}/\mathrm{A}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{C}/\mathrm{B}} \longrightarrow 0.$$

(4) Pour tout partie multiplicative $\mathrm{S} \subset \mathrm{B}$ on a $\mathrm{S}^{-1}\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} \cong \Omega^1_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}/\mathrm{A}}$.

(5) Si $\mathrm{C} = \mathrm{B}/\mathrm{I}$ pour un idéal $\mathrm{I} \subset \mathrm{B}$, on a une suite exacte
$$\mathrm{I}/\mathrm{I}^2 \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{C} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{C}/\mathrm{A}} \longrightarrow 0.$$

(6) Si $\mathrm{B} = \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n]$ et $\mathrm{I} = (\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_r)$ on a
$$\Omega^1_{\mathrm{C}/\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{C}\mathrm{d}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{C}\mathrm{d}x_n}{(\mathrm{dF}_1, \ldots, \mathrm{dF}_r)} \qquad \text{où} \quad \mathrm{dF} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i.$$

(7) Soit A une algèbre locale sur k d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel k. Alors
$$\Omega^1_{\mathrm{A}/k} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

(8) Pour une extension finie de corps $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}$ on a
$$\Omega^1_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} = 0 \iff \mathrm{L} \text{ est séparable sur } \mathrm{K}.$$

(9) Soit F un corps de fonctions sur k. Alors $\dim \Omega^1_{\mathrm{F}/k} = 1$.