FEUILLE DE TD 1

Exercice 1. Soit z un nombre algébrique de polynôme minimal
$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0.$$

(a) Soit $d \in \mathbf{Z}$. Démontrer que dz est un entier algébrique si et seulement si $d^i a_{n-i} \in \mathbf{Z}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

(b) Supposons que z soit un entier algébrique non nul. Démontrer que $1/z$ est un entier algébrique si et seulement si $a_0 \in \{\pm 1\}$.

Exercice 2.

(a) Est-ce que $\frac{2}{3+\sqrt{13}}$ est un entier algébrique ?

(b) Déterminer le polynôme minimal du nombre algébrique $\frac{-2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$. Est-ce un entier algébrique ?

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ des entiers sans facteur carré distincts et $n \geq 1$ un entier. Démontrer que $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{n}$ est un entier algébrique si et seulement si soit $n = 1$, soit $n = 2$ et $a \equiv b \bmod 4$.

Exercice 4.

(a) Soit $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ un polynôme à coefficients entiers de degré n. Soit r un nombre rationnel, écrit sous la forme $r = u/v$ avec $u, v \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux, satisfaisant à $\mathrm{P}(r) = 0$. Montrer que u divise a_0 et v divise a_n.

(b) Soit x un nombre rationnel. Montrer que $2\cos(\pi x)$ est un entier algébrique.

(c) Soit $x \in [0, 1]$ un nombre rationnel tel que $\cos(\pi x)$ soit aussi rationnel. Montrer que x appartient à l'ensemble $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$.

Exercice 5 (Polynômes cyclotomiques)**.** Soit $n \geq 1$ un entier. Le $n$ème *polynôme cyclotomique* est le polynôme unitaire dont les racines sont les racines primitives $n$èmes de l'unité dans $\mathbf{C}$:
$$\Phi_n(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{1 \leq a \leq n \\ (a,n)=1}} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2\pi i a}{n}}\right).$$

(1) Écrire $\Phi_n(\mathrm{X})$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ et pour n un nombre premier. Quel est le degré de Φ_n ?

(2) Démontrer l'égalité
$$\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(\mathrm{X}).$$
Qu'est-ce qu'on obtient en prenant les degrés des deux côtés de l'égalité ?

(3) Démontrer par récurrence sur n que Φ_n est un polynôme unitaire à coefficients entiers.

(4) Soit p un nombre premier. Démontrer l'égalité $\Phi_{p^m}(\mathrm{X}) = \Phi_p(\mathrm{X}^{p^{m-1}})$ pour tout $m \geq 1$.

(5) Soit $n \geq 2$. Démontrer que le polynôme Φ_n est *palindromique*, c'est-à-dire satisfait à
$$\mathrm{X}^{\deg(\Phi_n)}\Phi_n(\mathrm{X}^{-1}) = \Phi_n(\mathrm{X}).$$

Exercice 6 (Irréductibilité des polynômes cyclotomiques)**.** Soit $n \geq 3$.

(1) Soit ζ une racine primitive $n$ème de l'unité et soit P son polynôme minimal. Montrer que $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ et qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ unitaire tel que $\Phi_n = \mathrm{PQ}$.

(2) Soit p un nombre premier ne divisant pas n. Montrer que $\Phi_n(\zeta^p) = 0$.

(3) Supposons que $\mathrm{Q}(\zeta^p) = 0$. Montrer que P divise le polynôme $\mathrm{Q}(\mathrm{X}^p)$.

(4) Toujours sous l'hypothèse $\mathrm{Q}(\zeta^p) = 0$, démontrer que Φ_n a un facteur carré modulo p et aboutir à une contradiction. Conclure que ζ^p est racine de P.

(5) Démontrer l'égalité $\Phi_n = \mathrm{P}$ et en déduire que Φ_n est irréductible dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$.

Exercice 7 (Un théorème de Kronecker)**.** Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ un polynôme unitaire à coefficients entiers. On suppose que toutes les racines complexes de P sont de module ≤ 1.

(a) Soit α une racine complexe de P. Démontrer que α^n est un entier algébrique de taille ≤ 1 pour tout entier n.

(b) En déduire que $\alpha = 0$ ou α est une racine de l'unité.

(c) Supposons P irréductible. Démontrer que $\mathrm{P} = \mathrm{X}$ ou P est un polynôme cyclotomique.

Exercice 8 (Corps cyclotomiques)**.** Soient $n \geq 1$ un entier et $\zeta = \exp(2\pi i/n)$.

(a) Calculer le degré du corps de nombres $\mathbf{Q}(\zeta)$.

(b) Déterminer tous les plongements complexes de $\mathbf{Q}(\zeta)$, ainsi que les nombres r_1 et r_2 des plongements réels et de paires de plongements complexes.

Exercice 9. Soit K le corps de nombres $\mathbf{Q}(\alpha)$ où α est une racine du polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} - 3$.

(a) Démontrer, par au moins deux méthodes différentes, que P est irréductible. Conclure que K est de degré 3.

(b) Calculer les polynômes caractéristiques de la multiplication par α et par α^2 dans K. En déduire les valeurs de la norme $\mathrm{N}_{\mathrm{K}}(\alpha^2)$ et la trace $\mathrm{Tr}_{\mathrm{K}}(\alpha^2)$.

(c) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{Q}$, la norme de $x - \alpha$ est égale à $\mathrm{P}(x)$.