

① Fonctions elliptiques

Définition: Un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ est un sous-groupe discret qui contient une $\mathbb{R}$ -base de $\mathbb{C}$. Il est donc de la forme

$$\Lambda = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$$

avec w_1, w_2 deux nombres complexes non nuls tels que $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$.

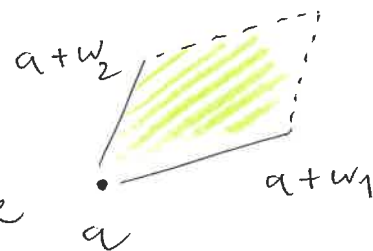
Définition: Un domaine fondamental pour le réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ est un sous-ensemble de la forme

$$D = \{a + t_1 w_1 + t_2 w_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$$

pour $a \in \mathbb{C}$. Il contient un unique représentant de chaque point de $\mathbb{C}$ pour la relation d'équivalence

$$z \sim z' \Leftrightarrow z - z' \in \Lambda$$

Définition: Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un réseau. Une fonction elliptique



par rapport à Λ est une fonction méromorphe

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

telle que $f(z+w) = f(z)$ pour tout $w \in \Lambda$.

On notera $\mathcal{C}(\Lambda)$ l'ensemble de ces fonctions; c'est un corps.

Remarque: Si f n'a pas de pôles (ou des zéros), alors f est constante.

En effet, soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine fondamental. Par Λ -périodicité,

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)| < +\infty$$

car $\overline{D}$ est compact

et par le théorème de Liouville une fonction holomorphe bornée est constante. (S'il n'y a pas de zéros, on refait l'argument avec $\frac{1}{f}$).

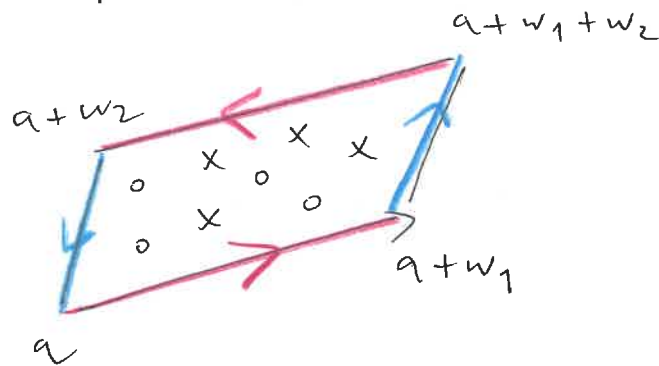
Théorème. Soient $f \in \mathcal{C}(\Lambda)^{\times}$ et $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine fondamental. Alors:

$$1) \sum_{x \in D} \text{res}_x(f) = 0$$

$$2) \sum_{x \in D} \text{ord}_x(f) = 0$$

$$3) \sum_{x \in D} \text{ord}_x(f) \cdot x \in \Lambda$$

Preuve: Comme les propriétés sont indépendantes du choix de D (on peut le écrire $\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \dots$), on peut choisir D tel que f n'ait pas de pôles ni de zéros sur ∂D (c'est possible car tout Λ que l'ensemble des zéros et des pôles sont discrets).



1) Par le théorème du résidu,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in D} \text{ord}_x(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_a^{a+w_1} f + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} f + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} f + \int_{a+w_2}^a f \right) = 0 \end{aligned}$$

somme zéro
par périodicité + orientation

2) Si f est elliptique, $\frac{f'}{f}$ aussi et

$$\text{res}_x \left(\frac{f'}{f} \right) = \text{ord}_x (f)$$

car on le voit en calculant dans le cas élémentaire $f = z^k$.

3) Faire par la théorie des résidus,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in D} \text{ord}_x (f) \cdot x &= \sum_{x \in D} \text{res}_x \left(z \frac{f'}{f} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_a^{a+w_1} + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} + \int_{a+w_2}^a \right) \\ &= \frac{w_1}{2\pi i} \int_a^{a+w_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{w_2}{2\pi i} \int_a^{a+w_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

(cette fonction n'est pas elliptique)

par le changement de variable $z = u + w_1$ sur la deuxième intégrale et $z = u + w_2$ sur la troisième. On utilise alors le fait que

(3)

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}$ pour tout chemin fermé γ sur $\mathbb{C}^*$ (qui se termine par exemple en calculant $\pi_1(\mathbb{C}^*)$). on l'applique au chemin

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$t \longmapsto f((1-t)a + t(a+w_2))$$

qui est linéaire défini car f n'a pas de zéros sur ∂D et fermé car $f(a) = f(a+w_2)$ $\square$

Corollaire: Une fonction elliptique non constante a au moins 2 pôles (comptés avec multiplicité).

S'il y a un seul pôle simple, 1) dit que le résidu est 0, donc holomorphe, ce qui implique constante.

Rappelons que $E = \mathbb{C}/\Lambda$ est muni d'une structure de surface de Riemann. Une fonction elliptique $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définit par passage au quotient une fonction holomorphe

$$\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Les énoncés 1) et 2) sont le thème de
 étudiés pour la fonction différentielle résumée
 $f(z) dz$ sur la surface de Riemann
 compacte E et le fait qu'une fonction
 non nulle a autant de pôles que de zéros.

La fonction $\wp$ de Weierstrass

Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un réseau. On pose:

$$G_{2k}(\Lambda) = \sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \frac{1}{w^{2k}}$$

série d'Eisenstein
de poids $2k$

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

fonction $\wp$
de Weierstrass

Proposition: 1) G_{2k} converge absolument

pour tout entier $k > 1$

2) $\wp_{\Lambda}$ converge absolument et uniformément
 sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$

3) $\wp_{\Lambda}$ est une fonction elliptique paire

$$\wp_{\Lambda}(-z) = \wp_{\Lambda}(z)$$

(9)

avec un pôle double avec résidu 0 sur tout élément de Λ et pas d'autres pôles.

Preuve: 1)
$$\sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \frac{1}{|w|^{2k}} = \underbrace{\sum_{0 < |w| < 1}}_{\text{finie}} + \sum_{|w| \geq 1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w \in \Lambda \\ |w| \geq 1}} \frac{1}{|w|^{2k}} &\leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\#\{w \in \Lambda \mid N \leq |w| < N+1\}}{N^{2k}} \\ &< \sum_{N=1}^{\infty} \frac{C}{N^{2k-1}} < \infty \quad \text{car } \underline{k > 1} \end{aligned}$$

(on a utilisé

$$\#\{w \in \Lambda \mid N \leq |w| < N+1\} \leq C \cdot N$$

pour une constante C indépendante de N ,
qui sera un exercice)

2) on écrit

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \neq 0 \\ |w| \leq |z|}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] + \sum_{|w| > |z|} \dots$$

*une finie de
termes holomorphes
sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$*

Si $|w| > 2|z|$, alors

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| = \left| \frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2} \right| \leq \frac{10|z|}{|w|^3}$$

$|z-w| \geq \frac{|w|}{2}$
 $|2w-z| \leq \frac{5}{2}|w|$

et on déduit le résultat de la partie 1).

3) la propriété $J_\Lambda(-z) = J_\Lambda(z)$ est évidente à partir de la définition. En dérivant:

$$J'_\Lambda(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$$

↑
série
uniforme

on trouve une fonction elliptique. On a:

$$J_\Lambda(z+w) = J_\Lambda(z) + \underbrace{c(w)}$$

~

c(w) est indépendante de z

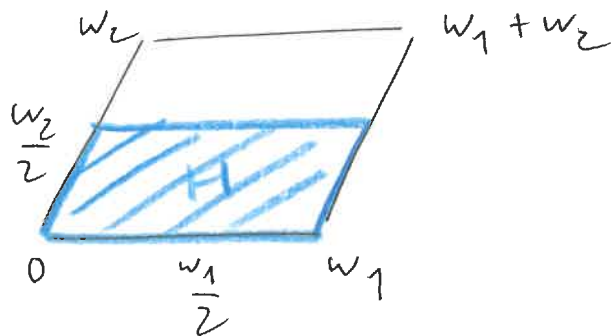
$$J'_\Lambda(z+w) = J'_\Lambda(z)$$

En faisant $z = -\frac{w}{2}$, on trouve $c(w) = 0$

qui n'est pas un pôle.

□

Étant donné un domaine fondamental D ,
 considérons H
 et la fonction



$$g(z) = \prod_{w \in H \setminus \{0\}} (f(z) - f(w))^{n_w}$$

$$\text{où } n_w = \begin{cases} \text{ord}_w(f) & \text{si } 2w \notin \Lambda \\ \frac{1}{2} \text{ord}_w(f) & \text{si } 2w \in \Lambda \end{cases}$$

les fonctions f et g satisfont pour
 tout $w \in H \setminus \{0\}$

$$\text{ord}_w(f) = \text{ord}_w(g)$$

puisque $f(z) - f(w)$ a des zéros en
 w et $-w$ et un pôle double en 0.

Par la relation $\sum_{w \in D} \text{ord}_w(f) = 0$, c'est
 aussi vrai à l'origine: $\text{ord}_0(f) = \text{ord}_0(g)$.

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} \text{ est elliptique holomorphe,}$$

donc constante, c'est-à-dire $f \in \mathbb{C}(\wp_\Lambda(z))$ $\square$

(6)

Plongement projectif

Commençons par calculer les coefficients de $\mathcal{P}$ autour de $z=0$. Pour $|z| < |w|$ avec $w \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} &= \frac{1}{w^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{w}\right)^2} - 1 \right] \\ &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{w}\right)^n \right] \frac{1}{w^2} \end{aligned}$$

en utilisant l'identité $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}$ on obtient alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\Lambda}(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \frac{n+1}{w^{n+2}} \right) z^n \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k} \end{aligned}$$

car les séries d'Eisenstein sont nuls pour k impair.

Proposition: Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, on a la relation

$$\mathcal{P}'(z)^2 = 4\mathcal{P}(z)^3 - \underbrace{60 G_4(\Lambda)}_{g_2} \mathcal{P}(z) - \underbrace{140 G_6(\Lambda)}_{g_3}$$

Preuve: C'est un calcul autour de $z=0$,
utilisant les développements

$$j(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + \dots$$

$$j(z)^3 = \frac{1}{z^6} + 9\frac{G_4}{z^2} + 15G_6 + \dots$$

$$j'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - 24\frac{G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots$$

On voit que

$$j'(z)^2 - 4j(z)^3 + 60G_4 j(z) + 170G_6 = O(z^2)$$

En tant que fonction elliptique holomorphe
elle est nulle, donc nulle car elle vaut
0 en $z=0$ □

on a ainsi obtenu une application
holomorphe

$$(j, j') : \mathbb{C} \setminus \Lambda \longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$$

$$z \longmapsto (j(z), j'(z))$$

Cette application s'étend en une
application holomorphe

$$\mathbb{C} \longrightarrow \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3\}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} [j(z) : j'(z) : 1] & \text{si } z \notin \Lambda \\ [0 : 1 : 0] & \text{si } z \in \Lambda \end{cases}$$

Proposition: le polynôme $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ a trois racines distinctes. En particulier,

$$\Delta(\Lambda) = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Preuve: Soient w_1, w_2 et $w_3 = w_1 + w_2$.

Comme $\wp'$ est impaire,

$$\wp'\left(\frac{w_i}{2}\right) = -\wp'\left(-\frac{w_i}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{w_i}{2}\right)$$

$\uparrow$
 impaire par
 translation par w_i

On a donc $\wp'\left(\frac{w_i}{2}\right) = 0$ et de la relation $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ on déduit que les racines de $f(x)$ sont les points

$$e_i = \wp\left(\frac{w_i}{2}\right)$$

Voyons qu'ils sont tous distincts:

la fonction $\wp(z) - \wp\left(\frac{w_i}{2}\right)$ est elliptique paire et a un pôle d'ordre 2, donc elle a 2 zéros, mais $\frac{w_i}{2}$ est déjà un zéro double. C'est donc le seul et

$$\wp\left(\frac{w_i}{2}\right) \neq \wp\left(\frac{w_j}{2}\right) \text{ pour } i \neq j$$

□

Proposition: $\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\varphi} E \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$
 $z \longmapsto [y(z) : y'(z) : 1]$

est un biholomorphisme.

Preuve: C'est une fonction holomorphe entre surfaces de Riemann compactes, et il suffit donc de voir que φ est bijective.

* Injectivité: soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$ avec
 $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, c'est-à-dire $y(z_1) = y(z_2)$
 $y'(z_1) = y'(z_2)$

Si $2z_1 \notin \Lambda$, la fonction $y(z) - y(z_1)$
s'annule en $z_1, -z_1, z_2$, donc

$$z_2 \equiv \pm z_1 \pmod{\Lambda}$$

car il n'y a que 2 zéros. Mais:

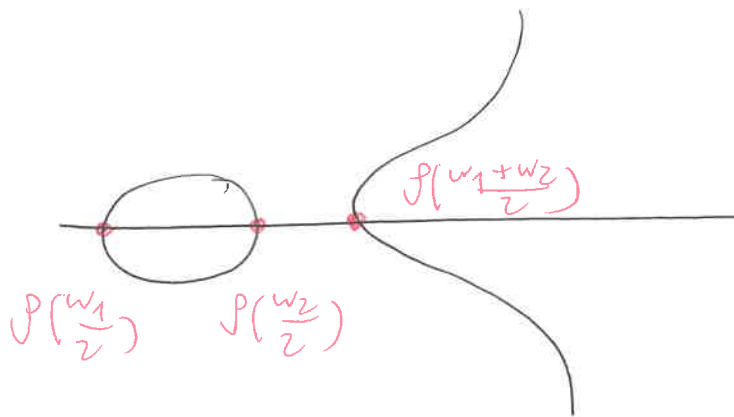
$$y'(z_1) = y'(z_2) = y'(-z_1) = -y'(z_1)$$

donc $y'(z_1) = 0$, c'est-à-dire $2z_1 \in \Lambda$.

$$\Rightarrow z_2 \equiv z_1 \pmod{\Lambda}$$

Si $2z_1 \in \Lambda$, alors $y(z) - y(z_1)$ a un zéro double en z_1 et donc $z_2 \equiv z_1 \pmod{\Lambda}$.

* Surjectivité: Soit $(x, y) \in E$. La fonction $f(z) = x$ a un zéro (car elle n'est pas nulle), disons en $z = a$, donc $x = f(a)$ et $y^2 = f'(a)$. On a à vérifier que a est un zéro de $f(z) - y^2 = (f(a) - y^2) + f'(a)(z - a) + \dots$ $\square$



Remarque: dans le langage de la géométrie algébrique, on a une courbe

$$y^2 z = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

est lisse. En effet, pour $f(x, y, z) = y^2 z - \dots$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -12x^2 + g_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2$$

et les points singuliers seraient les $[x:y:1]$
 où $4x^3 - g_2x - g_3$ a une racine double.

Théorème d'uniformisation :

Sont $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 - 27b^2 \neq 0$.

Alors il existe un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ avec

$$a = g_2(\Lambda) \quad b = g_3(\Lambda).$$

Aussi, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow E(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto [y(z) : y'(z) : 1] \end{aligned}$$

admet pour inverse l'application

$$\begin{aligned} E(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda \\ P &\longmapsto \int_0^P \frac{dx}{y} \end{aligned}$$

qui est bien définie car l'intégrale
 dépend du choix de chemin par



$$\int_{\gamma_1} \frac{dx}{y} = w_1$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{dx}{y} = w_2$$

périodes de la courbe elliptique

Morphismes de courbes elliptiques complexes

Sont $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$ des réseaux.

Si $\alpha \Lambda_1 \subset \Lambda_2$, alors la multiplication par α est un morphisme de groupes holomorphe

$$f_\alpha: \mathbb{C}/\Lambda_1 \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$$

$$z \longmapsto \alpha z \text{ mod } \Lambda_2$$

qui envoie 0 sur 0. Ce sont les seuls!

Théorème: Il y a une bijection

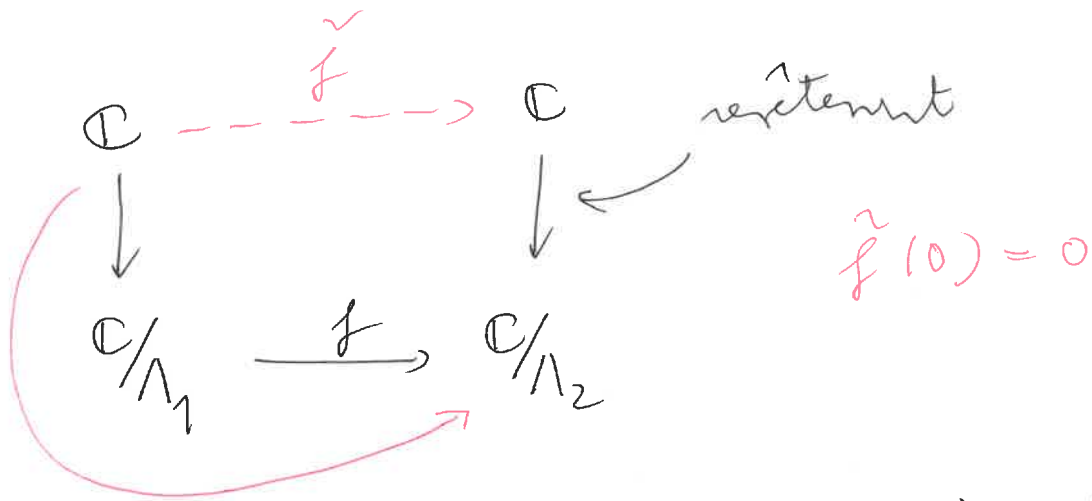
$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \Lambda_1 \subset \Lambda_2\} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{applications} \\ \text{holomorphes} \\ f: \mathbb{C}/\Lambda_1 \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2 \\ \text{avec } f(0)=0 \end{array} \right\}$$

$$\alpha \longmapsto f_\alpha$$

Preuve: Injectivité

$f_\alpha = f_\beta \Rightarrow \alpha z \equiv \beta z \text{ mod } \Lambda$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
 C'est-à-dire multiplication par $\alpha - \beta$ sur $\mathbb{C}$ (carré) sur Λ (discret), donc c'est l'application nulle. On trouve $\alpha = \beta$.

Surjectivité: soit $f: \mathbb{C}/\Lambda_1 \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$ une fonction holomorphe avec $f(0)=0$. Alors:



(on applique la propriété de relèvement)

$$\begin{array}{ccc}
 & X' & x_0' \\
 & \downarrow f & \downarrow \bar{f} \\
 Y & \xrightarrow{h} & X \\
 y_0 \mapsto & & x_0
 \end{array}$$

se relève en $Y \rightarrow X' \iff h_* (\pi_1(Y, y_0)) \subset p_* (\pi_1(X', x_0))$

et c'est donc toujours vrai si Y est simplement connexe).

on a $\tilde{f}(z+w) \equiv \tilde{f}(z) \pmod{\Lambda_2}$

donc $\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)$ est constante

$\Rightarrow \tilde{f}'(z+w) = \tilde{f}'(z)$ et donc $\tilde{f}'$ est

une fonction elliptique holomorphe

$\Rightarrow \tilde{f}(z) = \alpha z + \gamma \xrightarrow{\tilde{f}(0)=0} \gamma = 0$

et la condition $\tilde{f}(\Lambda_1) \subset \Lambda_2$ implique alors $\alpha \Lambda_1 \subset \Lambda_2$ □

Proposition: Soit $\mathbb{C}/\Lambda$ une courbe elliptique complexe. Alors $\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est

- soit égal à $\mathbb{Z}$
- soit un ordre dans un corps quadratique imaginaire.

Plus précisément, si $\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda) \neq \mathbb{Z}$ et si $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$, en définissant $z = \frac{w_1}{w_2}$ on a $K = \mathbb{Q}(z)$ quadratique imaginaire et

$$\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong K$$

on dit alors que $\mathbb{C}/\Lambda$ a multiplication complexe.

Preuve: Si $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$, alors $\mathbb{C}/\Lambda$ est isomorphe à $\mathbb{C}/\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}_{\Lambda_2} z$ et

$$\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda) = \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \Lambda_2 \subset \Lambda_2 \} \supseteq \mathbb{Z}$$

la condition $\alpha \Lambda_2 \subset \Lambda_2$ équivaut à

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 1 &= a + bz & \text{pour des entiers} \\ \alpha \cdot z &= c + dz & a, b, c, d \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, alors $b \neq 0$ et

$$\alpha \left(\frac{\alpha - a}{b} \right) = c + d \left(\frac{\alpha - a}{b} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - (a+d)\alpha + ad - bc = 0$$

ce qui implique que $\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est une extension entière de $\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, si $\alpha \in \mathbb{Z}$, alors

$$z = \frac{\alpha z}{\alpha} = \frac{c + dz}{a + bz}$$

$$\Rightarrow bz^2 + (a-d)z - c = 0$$

et comme z n'est pas réel, $K = \mathbb{Q}(z)$ est un corps quadratique imaginaire.

$$\text{Finalement, } \text{End}(\mathbb{C}/\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}[z]$$

$$\uparrow$$
$$\alpha = a + bz$$

$$\text{et } \text{End}(\mathbb{C}/\Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = K$$

□

Exemple : $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$

