

COURS 7 (9 février 2024)

⑤ Le théorème de la progression arithmétiqueThéorème (Dirichlet, 1837)

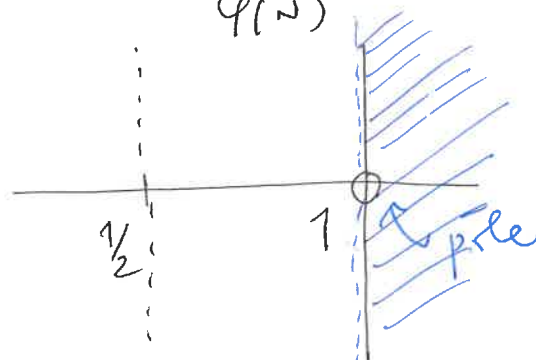
Sont a et N des entiers premiers entre eux. Alors il existe une infinité de nombres premiers de la forme $p \equiv a \pmod{N}$.

Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) > 1$, posons

$$\Phi(s; a) = \sum_{\substack{p \equiv a \\ \pmod{N}}} \frac{\log p}{p^s}$$

qui est une fonction holomorphe d'après ce qu'on a déjà vu. sur $\operatorname{Re}(s) > 1$

Proposition. $\Phi(s; a)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\{\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ qui n'a pas de pôle dans un voisinage de $\{\operatorname{Re}(s) \geq 1\}$, sauf un pôle simple de résidu $\frac{1}{\varphi(N)}$ en $s=1$.



Preuve: Soit X un caractère de Dirichlet modulo N et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$. Alors :

$$\underbrace{-\frac{L'(X, s)}{L(X, s)}}_{\text{fonction n\u00e9gative}} = \sum_p X(p) \frac{\log p}{p^s} + \underbrace{\sum_p X(p)^2 \frac{\log p}{p^s(p^s - X(p))}}_{\Psi(X, s)}$$

* pour $X \neq 1$ n'a pas de p\u00f4le dans un voisinage ouvert de $\{ \operatorname{Re}(s) \geq 1 \}$

* pour $X=1$, p\u00f4le simple de r\u00e9sidu \u00e9gal \u00e0 1.

(en effet, $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0, L(X, s) \neq 0\}$

est un ouvert contenant $\{ \operatorname{Re}(s) \geq 1 \}$)

$$\sum_p X(p) \frac{\log p}{p^s} = -\frac{L'(X, s)}{L(X, s)} - \Psi(X, s)$$

\u2191 holomorphe sur $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$

\u221d $\sum_p X(p) \frac{\log p}{p^s}$ d\u00e9finit une fonction

n\u00e9gative dans $\{ \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} \}$, sans p\u00f4le au voisinage de $\{ \operatorname{Re}(s) \geq 1 \}$ sauf en $s=1$ si $X=1$.

Comme a et N sont premiers entre eux, $X(a) \neq 0$,
et on peut donc écrire :

$$- \sum_x \frac{L'(x, s)}{L(x, s)} X(a)^{-1} = \sum_p \left(\sum_x \frac{X(p) X(a)^{-1}}{p^s} \right) + \sum_x \Psi(x, s) X(a)^{-1}$$

→ somme sur tous les caractères de Dirichlet modulo N

D'ailleurs,

$$\sum_x X(p) X(a)^{-1} = \sum_x X(p^b) = \begin{cases} 0 & p^b \not\equiv 1 \\ \varphi(N) & p^b \equiv 1 \end{cases}$$

↑ inverse de a modulo N

et comme $p^b \equiv 1 \pmod{N}$ équivaut à $p \equiv a \pmod{N}$,

$$- \sum_x \frac{L'(x, s)}{L(x, s)} X(a)^{-1} = \varphi(N) \Phi(s; a) + \sum_x \Psi(x, s) X(a)^{-1}$$

Par conséquent,

$$\Phi(s; a) = \frac{1}{\varphi(N)} \left(- \sum_x \frac{L'(x, s)}{L(x, s)} X(a)^{-1} - \dots \right)$$

s'étend en une fonction méromorphe dans le demi-plan $\{ \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} \}$, sans pôle au voisinage de $\{ \operatorname{Re}(s) \geq 1 \}$ sauf en $s=1$ où elle a une pôle simple de résidu $\frac{1}{\varphi(N)}$ (en prenant au caractère $\chi=1$, qui vaut 1 sur a) $\square$

Démonstration du théorème: Comme $\Phi(s; a)$ a une pôle en $s=1$, $\lim_{s \rightarrow 1} \Phi(s; a) = +\infty$, ce qui serait en contradiction avec la finitude de la somme $\sum_{1 \leq a \text{ nd } N} \frac{\log p}{p^s}$. $\square$

⑥ le théorème des nombres premiers

Théorème (Hadamard, de la Vallée-Poussin, 1896)

$$\text{large } X \rightarrow +\infty, \quad \pi(X) \sim \frac{X}{\log X}$$

Pour tout nombre réel $X > 0$, posons

$$\theta(X) = \sum_{p \leq X} \log p$$

lemme: Si $\theta(X) \sim X$ large $X \rightarrow +\infty$, alors

$$\pi(X) \sim \frac{X}{\log X} \text{ large } X \rightarrow +\infty.$$

Preuve: Par définition,

$$\theta(X) = \sum_{p \leq X} \log p \leq \sum_{p \leq X} \log X = \pi(X) \log X,$$

$$\text{d'où: } \frac{\theta(X)}{X} \leq \frac{\pi(X)}{X/\log X}.$$

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} \theta(X) &\geq \sum_{X^{1-\varepsilon} \leq p \leq X} \log p \\ &\geq (1-\varepsilon) \log X (\pi(X) - \pi(X^{1-\varepsilon})) \\ &\geq (1-\varepsilon) \log X (\pi(X) - X^{1-\varepsilon}), \end{aligned}$$

$$\text{d'où: } \pi(X) \leq \frac{\theta(X)}{(1-\varepsilon) \log X} + X^{1-\varepsilon}$$

mettant les deux estimées ensemble:

$$\frac{\theta(X)}{X} \leq \frac{\pi(X)}{X/\log X} \leq \frac{\theta(X)}{(1-\varepsilon)X} + \frac{\log X}{X^\varepsilon}$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} 1 \leq \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\pi(X)}{X/\log X} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$\downarrow X \rightarrow +\infty$
 0

pour $\varepsilon \rightarrow 0$ □

lemme: Supposons que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt$$

converge. Alors $\theta(X) \sim X$ lorsque $X \rightarrow +\infty$.

preuve: Soit X un nombre réel tel que $\theta(X) > \lambda X$ avec $\lambda > 1$. Alors:

$$\int_X^{\lambda X} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_X^{\lambda X} \frac{\theta(X) - t}{t^2} dt$$

θ est
croissante

$$\geq \int_X^{\lambda X} \frac{\lambda X - t}{t^2} dt$$

$$\int_1^{\lambda} \frac{\lambda - u}{u^2} du > 0$$

$$\begin{aligned} t &= Xu \\ dt &= X du \\ \frac{\lambda X - Xu}{X^2 u^2} X du & \end{aligned}$$

Si l'intégrale converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

il existe $\eta \geq 1$ tel que

$$\left| \int_a^b \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } b \geq a \geq \eta.$$

④

(critère de Cauchy). Donc, pour X assez grand, on ne peut pas avoir $\theta(X) > \lambda X$ avec $\lambda > 1$.

* De même, supposons que $\theta(X) < \lambda X$ pour X réel avec $\lambda < 1$. Alors :

$$\int_{\lambda X}^X \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda X}^X \frac{\theta(X) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda X}^X \frac{\lambda X - t}{t^2} dt$$

$$\parallel \int_{\lambda}^1 \frac{\lambda - u}{u^2} du < 0,$$

donc par le même argument on ne peut pas avoir de tels X arbitrairement grands :

$$\therefore \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\theta(X)}{X} = 1$$

□

lemme : Il existe un nombre réel $C > 0$

tel que $\theta(X) \leq CX$ pour tout $X \geq 2$.

preuve : Pour $n \geq 1$ entier, on a :

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \geq \binom{2n}{n}$$

Au vu de la formule

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! n!} = \frac{2n(2n+1)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$$

tout nombre premier p tel que $n < p < 2n$ divise (exactement une fois) $\binom{2n}{n}$, d'où :

$$\binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p < 2n} p$$

$$\Rightarrow \prod_{n < p < 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$$

et en prend les logarithmes

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \log 2$$

Soit X un nombre réel et $n = \lceil X/2 \rceil$, de sorte que $n-1 < X/2 \leq n$. On en déduit :

$$2n-2 < X \leq 2n$$

$$\begin{aligned} \theta(X) - \theta(X/2) &\leq \underbrace{\theta(2n) - \theta(n-1)}_{\theta(2n) - \theta(n) + \theta(n) - \theta(n-1)} \\ &\leq 2n \log 2 + \underbrace{\theta(n) - \theta(n-1)}_{\leq \log n \leq n} \\ &\leq n(2 \log 2 + 1) \leq X(2 \log 2 + 1) \end{aligned}$$

$n < 1 + X/2 \leq X$ si $X \geq 2$

(l'égalité est aussi triviale satisfait pour $0 < X < 2$ car $\theta(X) = 0$ dans ce cas).

pour $X > 1$

$$\theta(X) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\theta\left(\frac{X}{2^n}\right) - \theta\left(\frac{X}{2^{n+1}}\right) \right)$$

$$\leq (1 + 2 \log 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X}{2^n}$$

$$\leq 2(1 + 2 \log 2) X$$

□

Soient $p_1, p_2, \dots$ les nombres premiers et $p_0 = 1$.

Calculons, pour $\operatorname{Re}(s) > 1$,

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log p_i}{p_i^s}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\theta(p_i) - \theta(p_{i-1}))}{p_i^s}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \theta(p_i) \left(\frac{1}{p_i^s} - \frac{1}{p_{i+1}^s} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \theta(p_i) \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{s}{x^{s+1}} dx$$

$\left[-\frac{1}{x^s} \right]_{p_i}^{p_{i+1}}$

$$= \int_2^{\infty} \theta(x) \frac{s}{x^{s+1}} dx$$

(car $\theta(x)$ vaut $\theta(p_i)$ sur l'intervalle (p_i, p_{i+1}))

$$= s \int_1^{\infty} \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx$$

$\theta(x)=0$
pour $x < 2$

Come, par ailleurs,

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s} \right]_1^{\infty}$$

on obtient

$$\Phi(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx,$$

ou encore

$$\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx$$

Rappelons l'égalité

$$-\frac{\mathcal{J}'(s)}{\mathcal{J}(s)} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

intégrale sur $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$

et que, comme $J(s)$ ne s'annule pas sur $\operatorname{Re}(s)=1$, la fonction $-\frac{J'(s)}{J(s)}$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\{ \operatorname{Re}(s) \geq 1 \}$, sauf un pôle simple de résidu 1 en $s=1$.

$$\Rightarrow \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} \text{ est holomorphe sur}$$

un voisinage de $\{ \operatorname{Re}(s) \geq 1 \}$. En particulier:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} \right) = \lim_{s \rightarrow 1} \int_1^{\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx \quad (*)$$

existe, et pour conclure il suffit de montrer que cette limite est égale à

$$\int_1^{\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$$

Faisons le changement de variable $x = e^t$:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^{\infty} \frac{\theta(e^t) - e^t}{e^{(s+1)t}} e^t dt \\ &= \int_0^{\infty} (\theta(e^t) - e^t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

et $s \rightarrow s+1$ pour transférer le problème
à une limite en $s=0$:

$$\frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

avec $f(t) = \Theta(e^t) e^{-t} - 1$

$\Theta(x) \in \mathbb{C}x$ par le lemme,

$0 \leq \Theta(e^t) e^{-t} \leq C$, et donc la fonction
 $f(t)$ est bornée.

Théorème (Newman) Soit $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$
une fonction mesurable bornée telle que

$$g(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

converge et définit une fonction holomorphe
sur $\operatorname{Re}(s) > 0$ qui se prolonge en une
fonction holomorphe sur un voisinage de
 $\{\operatorname{Re}(s) \geq 0\}$. Alors l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t) dt$
existe et vaut $g(0)$.