

COURS 6 (2 janvier 2024)

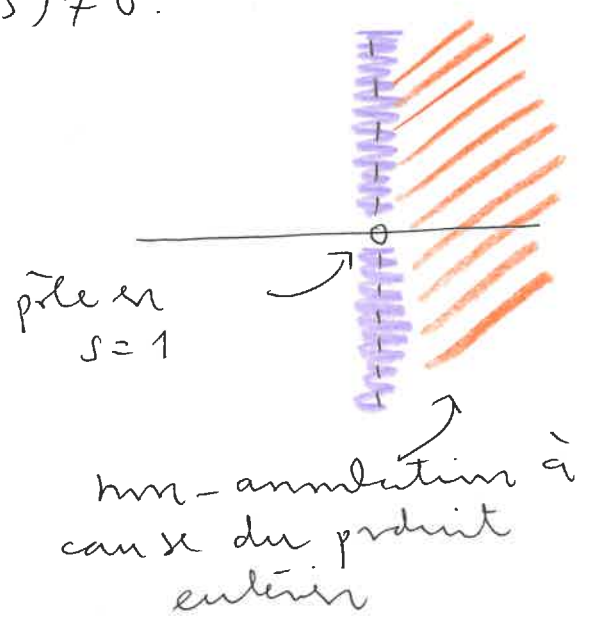
④ Nm - annulation sur la droite $\text{Re}(s) = 1$

Théorème: Pour tout nombre complexe $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $\text{Re}(s) > 1$, on a $\zeta(s) \neq 0$.

Démonstration: Si $\text{Re}(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

et $\zeta(s) \neq 0$. Prenons la dérivée logarithmique



$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log(1 - p^{-s})'}{1 - p^{-s}} = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1}$$

$$\frac{-(p^{-s})'}{1 - p^{-s}} = \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}}$$

$$= \sum_p \frac{\log p}{p^s} + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$$

$$\frac{1}{p^s - 1} = \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^s(p^s - 1)}$$

Comme $\log p = O(p^\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$, les séries $\sum_p \frac{\log p}{p^s}$ et $\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$ convergent

uniquement dans $\{\operatorname{Re}(s) > a\}$ pour $a > 1$
 et $\{\operatorname{Re}(s) > b\}$ pour $b > \frac{1}{2}$ respectivement,
 et définissent donc des fonctions holomorphes
 sur $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$ et $\{\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$.

on a :

$$\underbrace{\sum_p \frac{\log p}{p^s}}_{\Phi(s)} = - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \underbrace{\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}}_{\Psi(s)}$$

et donc $\Phi(s)$ se prolonge en une fonction
méromorphe sur $\{\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$.

↳ pôles proviennent du pôle simple de ζ
 en $s=1$ (pôle simple de résidu 1 car

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + f'(s)}{\frac{1}{s-1} + f(s)} = \frac{-\frac{1}{s-1} + (s-1)f'(s)}{1 + (s-1)f(s)}$$

$$\text{donc } \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -1$$

et les zéros de ζ dans le demi plan
 $\{\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ avec résidu - ordre du zéro

(par un calcul similaire). En particulier,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} (\sigma - 1) \zeta(\sigma) = 1$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} (\sigma - 1) \zeta(\sigma + it) = -m$$

si ζ s'annule à l'ordre m en $s = \sigma + it$.

Supposons que ζ a un zéro d'ordre m en $s = 1 + it$
et que ζ a aussi un zéro d'ordre n en
 $s = 1 + 2it$. Comme

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

car c'est vrai sur
la droite réelle > 1
(+ fonction holomorphe)

cei entraîne que

$\zeta(s)$ a un zéro d'ordre m en $1 - it$
n en $1 - 2it$

Soit σ un nombre réel > 1 . Alors:

$$F(\sigma) = \zeta(\sigma - 2it) + 4\zeta(\sigma - it) + 6\zeta(\sigma) \\ + 4\zeta(\sigma + it) + \zeta(\sigma + 2it)$$

$$= \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma} \left(p^{2it} + 4p^{it} + 6 + 4p^{-it} + p^{-2it} \right) \\ \underbrace{\left(p^{\frac{it}{2}} + p^{-\frac{it}{2}} \right)^4}_{\text{}}$$

$$= \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma} \underbrace{\left(2 \cos\left(\frac{t}{2} \log p\right)\right)^4}_{p^{it\frac{t}{2}} + p^{-it\frac{t}{2}} = e^{\frac{it}{2} \log p} + e^{-\frac{it}{2} \log p}} \geq 0$$

Par conséquent, cette fonction

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} (\sigma - 1) F(s) \geq 0$$

mais le côté gauche est aussi égal à

$$-n - 4m + 6 - 4m - n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{8m + 2n \leq 6}$$

qui a une solution en $m \geq 0$ seulement pour $m = 0$.

∴ $\zeta(s)$ ne s'annule pas en $s = \sigma + it$.

□

Théorème: Soit X un caractère de Dirichlet modulo N .

(1) Si $X \neq 1$, alors $L(X, s) \neq 0$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) \geq 1$.

(2) Si $X = 1$, alors $L(X, s) \neq 0$ pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec $\operatorname{Re}(s) \geq 1$.

Proposition. Si $\chi \neq 1$ est réel (c'est-à-dire $\chi = \bar{\chi}$), alors $L(\chi, 1) \neq 0$.

Démonstration: Pour $t \in [0, 1)$, soit

$$f(t) = \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \frac{t^d}{1-t^d}$$

Cette série converge normalement sur chaque intervalle $[0, a]$ avec $a < 1$, puisque

$$\left| \chi(d) \frac{t^d}{1-t^d} \right| \leq \frac{a^d}{1-a^d}$$

Écrivons

$$f(t) = \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \sum_{m=1}^{\infty} t^{dm} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{d|n} \chi(d)$$

en regroupant les termes de même valeur $n = dm$.

Soit $c_n = \sum_{d|n} \chi(d)$. Si $n = p^a$, alors

$$c_{p^a} = 1 + \chi(p) + \chi(p)^2 + \dots + \chi(p)^a$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid N \\ a+1 & \text{si } \chi(p) = 1 \\ 1 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ } a \text{ pair} \\ 0 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ } a \text{ impair} \end{cases}$$

Dans tous les cas, $c_{p^a} \geq 0$. En général:

$$n = \prod p_i^{a_i} \quad \text{donc}$$

$$c_n = \sum_{m_1=0}^{a_1} \dots \sum_{m_2=0}^{a_2} \underbrace{X(p_1^{m_1} \dots p_2^{m_2})}_{X(p_1^{m_1}) \dots X(p_2^{m_2})}$$

$$= \prod_{i=1}^2 c_{p_i^{a_i}} \geq 0$$

On a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$ car $c_n = 1$ pour

toutes les puissances de p divisant N et $c_n \geq 0$ pour tout n .

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty.$$

Soit $b_n = (1-t) \left(\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{1}{n(1-t)} \right)$ logique
 $\frac{t^n}{1-t^n} \sim \frac{1}{n(1-t)}$
si $t \rightarrow 1$

$$= \frac{t^n}{1+t+\dots+t^{n-1}} - \frac{1}{n}$$

la suite (b_n) est croissante. En effet,

$$b_n - b_{n+1} = \frac{t^n}{(1+t+\dots+t^{n-1})(1+t+\dots+t^n)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

Par ailleurs,

$$1+t+\dots+t^{n-1} \geq n t^{\frac{n-1}{2}}$$

$$1+t+\dots+t^n \geq (n+1)t^{\frac{n+1}{2}} \geq (n+1)t^{\frac{n+1}{2}} \quad (7)$$

(inégalité arithmétique - géométrique) $t < 1$

ce qui donne

$$b_n - b_{n+1} \leq \frac{t^n}{n(n+1)t^n} - \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

$$\Rightarrow b_n \leq b_{n+1}$$

Supposons par l'absurde que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(n)}{n} = L(X, 1)$
 s'annule. Alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X(n) \frac{t^n}{1-t^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} X(n) \left(\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{1}{n(1-t)} \right) \\ &= \frac{1}{1-t} \sum_{n=1}^{\infty} b_n X(n) \end{aligned}$$

Puisque X est prétype de période N et que $\sum_{n=1}^N X(n) = 0$, on a $\left| \sum_{d=1}^n X(d) \right| \leq N$

quel que soit l'entier n . Mais alors :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n X(n) \right| = \left| \sum_{d=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^d X(n) \right) (b_d - b_{d+1}) \right|$$

$$\leq N \sum_{d=1}^{\infty} (b_{d+1} - b_d) = N(1-t)$$

$\uparrow$
 $b_1 = t - 1$

On a donc $|f(t)| \leq N$ pour tout $t \in [0, 1]$,
 la contradiction avec le fait que $f(t) \rightarrow \infty$
 pour $t \rightarrow 1$ □

Démonstration du théorème : L'entrée de
 non-annulation pour $\text{Re}(s) > 1$ a déjà
 été traitée avec le produit eulérien.

Posons

$$Z(s) = \prod_{\chi} L(\chi, s) = \prod_{\chi} \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}$$

$\uparrow$ produit sur tous les
 caractères de Dirichlet
 modulo N

et calculons la dérivée logarithmique
 pour $\text{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned}
 - \frac{Z'(s)}{Z(s)} &= \sum_{\chi} \sum_p \log(1 - \chi(p) p^{-s})' \\
 &= \sum_{\chi} \sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s - \chi(p)}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_p \left(\sum_{\chi} \chi(p) \right) \frac{\log p}{p^s} + \sum_{\chi} \sum_p \frac{\chi(p)^2 \log p}{p^s (p^s - \chi(p))}$$

$$\frac{\chi(p)}{p^s - \chi(p)} = \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p)^2}{p^s - \chi(p)}$$

$$\text{Puis } \Phi(s) = \sum_p \left(\sum_{\chi} \chi(p) \right) \frac{\log p}{p^s}$$

$$= \varphi(N) \sum_{p \equiv 1 \pmod N} \frac{\log p}{p^s}$$

$$\sum_{\chi} \chi(p) = \begin{cases} 0 & p \not\equiv 1 \\ |\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times| = \varphi(N) & p \equiv 1 \end{cases}$$

Soit $t > 0$ un nombre réel. Puis

$$\eta = \lim_{s \rightarrow 1} Z(s) = \sum_{\chi} \frac{\text{ordre du zéro/pôle de } L(\chi, s)}{s=1}$$

$$m = \lim_{s \rightarrow 1+ti} Z(s)$$

$$n = \lim_{s \rightarrow 1+2ti} Z(s)$$

On sait déjà que $J(s)$, et donc $L(1, s)$, a un pôle simple en $s=1$ et que les autres

fonctions L n'ont ps de pôle dans $\{\operatorname{Re} s > 0\}$.

Donc: $\gamma \geq -1$, $m, n \geq 0$.

Comme $\overline{L(X, s)} = L(\overline{X}, \overline{s})$, et que $Z(s)$ est le produit sur tous les caractères, on a aussi

$$m = \operatorname{ord}_{s=1-ti} Z(s)$$

$$n = \operatorname{ord}_{s=1-2ti} Z(s)$$

Avec la même méthode déjà utilisée pour la fonction zêta,

$$\sum_{k=-2}^2 \binom{4}{2+k} \Phi(\sigma + tk i)$$

$$= \sum_{\substack{p \equiv 1 \\ \operatorname{ord} N}} \frac{\log p}{p^\sigma} (2 \cos(t \log p))^4 \geq 0$$

ce qui est multiplié par $(\sigma-1)$ et fait tendre $\sigma \rightarrow 1$ donne

$$-n - 4m - 6\gamma - 4m - n \geq 0$$

$$\Rightarrow -6\gamma \geq 8m + 2n$$

et les seules situations possibles sont

$$q = -1 \Rightarrow m = 0, \text{ car on voulait}$$

$$q = 0$$

Dans le cas $q = 0$, il existe un (seul!) caractère χ modulo N tel que

$$L(\chi, s) \text{ a un zéro simple en } s=1$$

(par comparaison le pôle simple de $\zeta(s)$)

Mais $L(\bar{\chi}, 1) = \overline{L(\chi, 1)} = 0$, et car il y a un seul caractère $\chi = \bar{\chi}$, c'est-à-dire χ est à valeurs réelles. Mais on a déjà $L(\chi, 1) \neq 0$ dans ce cas $\square$

