

COURS 5 (31 janvier 2024)

③ Fonction zêta et fonctions L de Dirichlet

Soit $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

(Notation: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$)

Définition: on dit que f est multiplicative

si $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous m et n premiers entre eux.

On dit que f est complètement multiplicative

si $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque: f multiplicative est déterminée par les valeurs $f(p^k)$, p premier, $k \geq 1$

f complètement multiplicative est déterminée par les valeurs $f(p)$, p premier.

Exemple: $f = 1$ fonction constante

$\chi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ caractère de Dirichlet
modulo N sont des fonctions complètement multiplicatives.

Soit $(a_p)_p$ une suite de nombres complexes indexée par les nombres premiers. Si la suite

$$\left(\prod_{p \leq n} a_p \right)_n$$

converge, on note $\prod_{p \in \mathcal{P}} a_p$ sa limite, et on l'appelle le produit eulérien des a_p .

Théorème: Soit $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolument (i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ converge).

Si f est multiplicative, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \left(\sum_{k \geq 0} f(p^k) \right)$$

Si f est complètement multiplicative, alors $|f(p)| < 1$ pour tout nombre premier p et

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}$$

Démonstration: Soit $N \geq 1$ un entier, et soient $p_1, \dots, p_r$ les nombres premiers $\leq N$.

(2)

$$\prod_{p \leq N} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)}_{\substack{\text{somme} \\ \text{car } (f(n))_{n \geq 1} \\ \text{est par} \\ \text{hypothèse}}} \right) = \sum_{n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^r f(p_i^{n_i})$$

$$= \sum_{n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}} f\left(\prod_{i=1}^r p_i^{n_i}\right)$$

Si f est multiplicative. Si $A_N \subset \mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers dont les diviseurs premiers sont $\leq N$, on a

$$\prod_{p \leq N} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) \right) = \sum_{n \in A_N} f(n)$$

par l'unicité de la décomposition en facteurs premiers. Comme $\mathbb{N}^* = \bigcup_N A_N$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolument, on en déduit

$$\prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Supposons maintenant que f soit complètement multiplicative. On a alors $f(p^k) = f(p)^k$ pour p premier et $k \geq 1$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)$ converge implique $|f(p)| < 1$. On peut alors développer en série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(p)^k = \frac{1}{1-f(p)}$$

pour enfin obtenir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-f(p)} \quad \square$$

Les exemples qui nous intéressent ne satisfont pas aux hypothèses du théorème. Par contre, pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) > 1$, si f est bornée ($|f(n)| \leq C$ pour tout n), alors la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

converge absolument, puisque $\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{C}{n^{\operatorname{Re}(s)}}$

et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

En appliquant ce qui précède, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-f(p)p^{-s}}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$
avec $\operatorname{Re}(s) > 1$



Définition: la fonction zêta de Riemann est la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Si χ est un caractère de Dirich modulo N , on appelle fonction L de Dirichlet de χ

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$$

Remarque: Pour $\chi = 1$, le caractère trivial, on trouve

$$L(\chi, s) = \prod_{p|N} (1 - p^{-s}) \zeta(s)$$

↑ car dans $L(\chi, s)$
seulement les entiers
premiers à N
interviennent

et donc l'étude de la fonction L se réduit à celui de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$

Théorème: La fonction ζ de Riemann est holomorphe et non nulle sur $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\operatorname{Re}(s) > 0$ avec une unique pôle en $s=1$, simple de résidu égal à 1.

Preuve: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformément

ent sur chaque demi-plan $\operatorname{Re}(s) > a$ avec $a > 1$ et une limite de fonctions holomorphes qui converge uniformément est holomorphe.

Pour le prolongement:

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} x^{-s} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \end{aligned}$$

$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^{\infty}$

Par intégration par parties:

$$f_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx = \left[\underbrace{\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right)}_u \underbrace{(x-n-1)}_{d(x-n-1)} \right]_n^{n+1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$,
il existe n_0 tel
que
 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
pour tout $n \geq n_0$
et tout x

(4)

$$+ s \int_n^{n+1} (n+1-x) x^{-s-1} dx$$

$$\int d(ur) = \int du r + \int u dr$$

$$= s \int_n^{n+1} (n+1-x) x^{-s-1} dx$$

$$\Rightarrow |f_n(s)| \leq \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re}(s)+1}}$$

convergence
nulle
 $\Rightarrow$ convergence
uniforme

La fonction f_n est holomorphe sur $\operatorname{Re}(s) > 0$
et la série $\sum f_n(s)$ converge uniformément
sur $\operatorname{Re}(s) > a$ pour tout $a > 0$, donc f est
holomorphe sur $\operatorname{Re}(s) > 0$, et on a

$$J(s) = \frac{1}{s-1} + f(s)$$

Pour la non-annulation on utilise:

lemme: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$, le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$

converge. Il converge vers 0 $\Leftrightarrow$ un des facteurs
est nul.

Dans notre situation:

$$J(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1 + \underbrace{\frac{1}{p^s} + \dots}_{u_n} \right)$$

et la somme $\sum_p \left| \frac{1}{p^s} + \dots \right| \leq \sum_n \left| \frac{1}{n^s} \right|$

converge pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. □

Théorème. Soit X un caractère de Dirichlet modulo N . Si $X \neq 1$, la fonction

$$s \mapsto L(X, s)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{\operatorname{Re}(s) > 0\}$.

Démonstration: Soit $F(n) = \sum_{m=1}^n X(m)$.

Pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a:

$$\begin{aligned} L(X, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n) - F(n-1)}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \end{aligned}$$

La fonction $F(n)$ est bornée:

$$F(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \bmod N}}^n X(m), \text{ d'où : } |F(n)| \leq \varphi(N)$$

$$\sum_{m=1}^N X(m) = 0$$

(5)

Par ailleurs, lorsque n tend vers l'infini

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} &= \frac{1}{n^s} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-s} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite

$$\sum F(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, uniformément dans $\operatorname{Re}(s) > a$ pour $a > 0$. La somme est une fonction holomorphe qui prolonge $L(X, s)$ $\square$

Preuve du lemme sur les produits infinis

Comme $\sum |a_n|$ converge, $|u_n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et en particulier $|u_n| < \frac{1}{2}$ pour n assez grand. Quitte à "oublier" un nombre fini de termes, on peut supposer $|u_n| < \frac{1}{2}$ pour tout n . On définit alors

$$\log(1 + u_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{u_n^m}{m}$$

et cette quantité satisfait $1 + u_n = e^{\log(1 + u_n)}$.

On a alors:

$$\prod_{n=1}^N (1+u_n) = \prod_{n=1}^N e^{\log(1+u_n)} = e^{\sum_{n=1}^N \log(1+u_n)}$$

Comme

$$|\log(1+z)| \leq 2|z| \quad \text{si } |z| < \frac{1}{2}$$

$$(\text{en effet, } |\log(1+z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \leq |z| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}}_{=2})$$

la série $\sum_{n=1}^N \log(1+u_n)$ converge par
comparaison avec $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Notons C sa
limite, on a

$$\prod_{n=1}^N (1+u_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^C \neq 0$$

□