

Chapitre 3 : Équirépartition

① Équirépartition modulo 1

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$.
 On dit que $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie quand
 $n \rightarrow \infty$ si, pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \mid 1 \leq k \leq n, k \in [a, b]\}|}{n} = b - a.$$

Définition on dit qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 si la suite des parties fractionnaires

$$\{x_n\} = x_n - [x_n] \in [0, 1)$$

est équirépartie.

Remarque: Une suite équirépartie est dense.
 En effet, pour tout $c \in [0, 1]$, soit U_c un voisinage ouvert de longueur $\varepsilon > 0$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \mid 1 \leq k \leq n, x_k \in U_c\}|}{n} = \varepsilon > 0$$

et donc pour n assez grand il existe $x_n \in U_c$.

La répartition n'est pas uniforme !

Proposition: La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie dans $[0, 1]$ si et seulement si

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx$$

pour toute fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration:

$\Rightarrow$ Soit $f = \mathbb{1}_{[a, b]}$ la fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$. Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \mid 1 \leq k \leq n, x_k \in [a, b]\}|}{n}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = b - a$$

d'où l'égalité $(*)$ est vraie dans ce cas, ainsi que pour toute combinaison linéaire de fonctions $\mathbb{1}_{[a, b]}$, c'est-à-dire pour les fonctions n -scalaires.

Soit maintenant $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction n -scalaire g telle que

$$\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

(2)

on a alors:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \int_0^1 f(x) dx \right| \\
 & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - g(x_k)| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k) - \int_0^1 g(x) dx \right| \\
 & \quad + \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx \\
 & \leq 3\varepsilon
 \end{aligned}$$

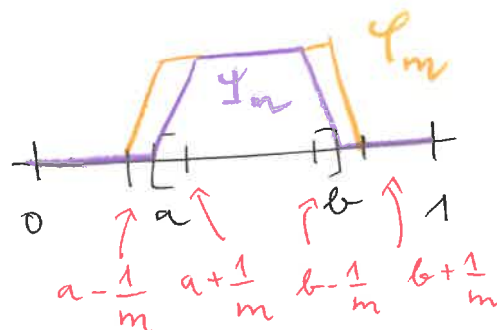
pour n assez grand.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $[a, b] \subset [0, 1]$. On construit des fonctions continues

$$\psi_m \leq \mathbb{1}_{[a, b]} \leq \varphi_m,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_m(x_k) & \leq \frac{\left| \left\{ k \mid \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n \\ x_k \in [a, b] \end{array} \right\} \right|}{n} \\
 & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_m(x_k)
 \end{aligned}$$



et en passant à la limite d'abord quand $n \rightarrow \infty$, puis quand $m \rightarrow \infty$, on obtient que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie. $\square$

Remarque: Soit X un espace topologique compact.

Plus généralement, on dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie selon une mesure μ sur X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_X f d\mu$$

pour toute fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Le μ qu'on regarde est celui de la mesure de Lebesgue et s'appelle parfois équirépartition uniforme.

② le critère de Weyl

Théorème (critère de Weyl)

Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie dans $[0, 1]$ si et seulement si, pour tout entier r non nul,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i r x_k} = 0$$

Démonstration

$$\boxed{\Rightarrow} \text{ Comme } e^{2\pi i r x_k} = \cos(2\pi r x_k) + i \sin(2\pi r x_k),$$

il suffit de démontrer *équidistribution*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(2\pi k x_k) \stackrel{\text{red arrow}}{=} \int_0^1 \cos(2\pi x) dx$$

$$= \left[\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \right]_0^1 = 0$$

et de même pour le sinus.

$\boxed{\Leftarrow}$ la propriété (*) est vraie pour la fonction constante égale à 1 et pour $\cos(2\pi x)$ et $\sin(2\pi x)$, donc pour tout polynôme trigonométrique

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos(2\pi x) + b_1 \sin(2\pi x))$$

$$+ \dots + (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x))$$

Or, on sait que toute fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques et on conclut ainsi dans la preuve de la proposition $\square$

Remarque: Dans la situation d'équidistribution plus générale, on voit qu'il suffit de tester l'équidistribution pour une famille de fonctions dont les combinaisons linéaires sont des ss

dans les fonctions continues $\mathcal{C}^0(X; \mathbb{C})$.

③ Exemples

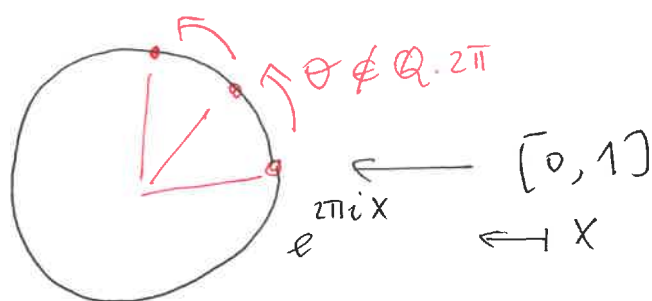
Exemple 1: Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel.

Alors la suite $(n\theta)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1. On commence par remarquer que $e^{2\pi i n \theta} = e^{2\pi i 2n\theta}$ et on peut donc travailler avec $n\theta$. Comme θ est irrationnel, 2θ n'est pas un entier, c'est-à-dire $1 - e^{2\pi i 2\theta}$ n'est pas nul. Alors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i 2k\theta} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^{2\pi i 2\theta})^k \\ &= \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i 2\theta} - e^{2\pi i 2(n+1)\theta}}{1 - e^{2\pi i 2\theta}} \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i 2k\theta} \right| \leq \frac{2}{n} \frac{1}{|1 - e^{2\pi i 2\theta}|}$$



$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Exemple 2: la suite $\{\log n\}_{n \geq 1}$ est dense dans $[0, 1]$ mais non équirépartie.

* Densité: Soit $[a, b] \subset [0, 1]$ avec $b > a$.
Pour tout s assez grand il existe n avec

$$e^{a+s} \leq n \leq e^{b+s}$$

d'où $a+s \leq \log n \leq b+s$, c'est-à-dire $\{\log n\}$ appartient à $[a, b]$.

* Non-équirépartition: on utilise la formule d'Euler-Maclaurin

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(k) = \frac{1}{n} \int_1^n F(t) dt + \frac{1}{n} \int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) F'(t) dt + \frac{F(1) + F(n)}{2n}$$

pour une fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

(Démonstration):

$$\int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) F'(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) F'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) F(k+1) - \left(-\frac{1}{2}\right) F(k) - \int_k^{k+1} F(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (F(k) + F(k+1)) - \int_1^n F(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} F(k) + \frac{F(1) + F(n)}{2} - \int_1^n F(t) dt
\end{aligned}$$

$u = t - k - \frac{1}{2}$
 $v = F(t)$

Appliquons cette formule à $F(t) = e^{2\pi i \log(t)}$
on trouve alors:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \log(k)} &= \frac{1}{n} \int_1^n e^{2\pi i \log(t)} dt \\
&+ \frac{1 + e^{2\pi i \log(n)}}{2n}
\end{aligned}$$

$$(F'(t) = \frac{2\pi i F(t)}{t}$$

$$+ \frac{1}{n} \int_1^n \left(t - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi i}{t} e^{2\pi i \log(t)} dt$$

le deuxième terme $\rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

le troisième terme est limité par

$$\frac{2\pi}{n} \int_1^n \frac{1}{2} \frac{dt}{t} = \pi \frac{\log(n)}{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

⑤

Par contre, le premier terme vaut

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_1^n e^{2\pi i \log(t)} dt &= \frac{1}{n} \left[e^{\frac{(2\pi i + 1) \log(t)}{2\pi i + 1}} \right]_1^n \\ &= \frac{e^{2\pi i \log(n)} - 1/n}{2\pi i + 1} \end{aligned}$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le critère de Weyl est donc en défaut pour $\alpha = 1$.

④ Équirépartition des angles des premiers de Gauss

Théorème (Fermat) Tout nombre premier p tel que $p \equiv 1 \pmod{4}$ est somme de deux carrés. De plus, la répartition

$$p = a^2 + b^2$$

est unique si $a > b > 0$.

On en déduit que le nombre complexe $a + bi$ s'écrit de manière unique comme

$$a+bi = \sqrt{p} e^{i\theta_p} \text{ avec } \theta_p \in [0, \frac{\pi}{4}).$$

Théorème (Hervé) la suite $(\theta_p)_p$ est équirépartie: si p_n désigne le n -ième nombre premier tel que $p_n \equiv 1 \pmod{4}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n \mid \theta_{p_k} \in [a, b]\}| = \frac{4}{\pi} (b-a)$$

pour tout $[a, b] \subset [0, \frac{\pi}{4}]$.