

⑦ le théorème de Neuman

Rappel: la dernière fois nous avons vu la démonstration du théorème des résidus puis à

$$\underbrace{\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1}}_{\substack{\text{fonction} \\ \text{holomorphe au} \\ \text{voisinage de } \{ \operatorname{Re}(s) \geq 1 \}}}} = \int_1^{\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx$$

et pour conclure il fallait savoir que

$$\lim_{s \rightarrow 1} \int_1^{\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx = \int_1^{\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$$

En remplaçant s par $s+1$ pour regarder la situation en $s=0$ et faisant le changement de variable $x = e^t$, on trouve:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\theta(e^t) - e^t}{e^{(s+2)t}} e^t dt \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

avec $f(t) = \Theta(e^t) e^{-t} - 1$. Cette fonction est bornée, car on a en qe $\Theta(X) \leq CX$ pour tout nombre réel $X > 0$, d'où

$$-1 \leq f(t) \leq C - 1$$

Théorème (Newman) Soit $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction usuable bornée telle qe

$$g(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

converge et définit une fonction holomorphe sur $\{\operatorname{Re}(s) > 0\}$ qui se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\{\operatorname{Re}(s) \geq 0\}$.

Alors $\int_0^{\infty} f(t) dt$ existe et vaut $\boxed{g(0)}$.

Démonstration du théorème: Pour charger

$T > 0$, posons

$$g_T(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

qui est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Notre but: $g(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0)$

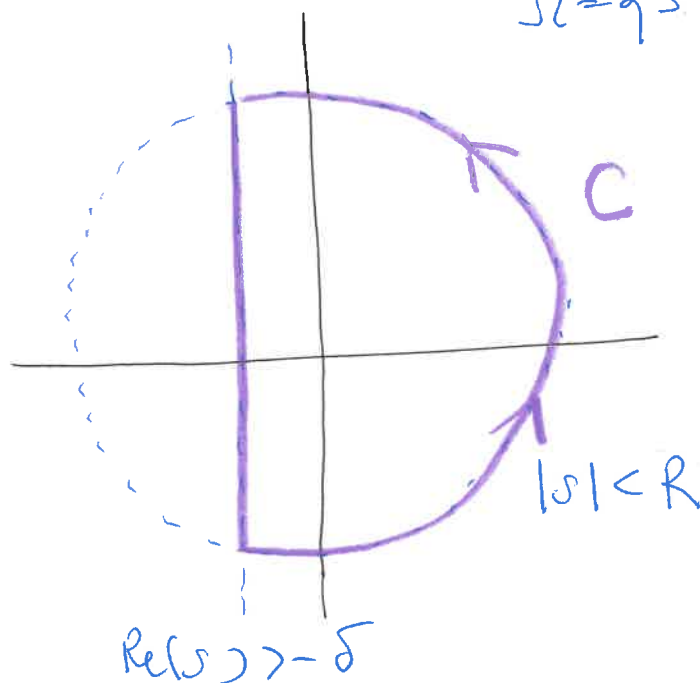
(2)

Comme f est par hypothèse bornée,

$$B = \max_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |f(t)|$$

est bien défini. Considérons l'ouvert

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < R, \operatorname{Re}(s) > -\delta\}$$



pour $R > 0$ "grand" et $\delta > 0$ "petit". Par hypothèse, $g(s)$ est holomorphe sur un voisinage de $\{\operatorname{Re}(s) \geq 0\}$ et donc sur un tel Ω .

Notons $C = \partial\Omega$.

Par le théorème des résidus de Cauchy,

$$h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C h(s) \frac{ds}{s}$$

pour toute fonction holomorphe h sur un

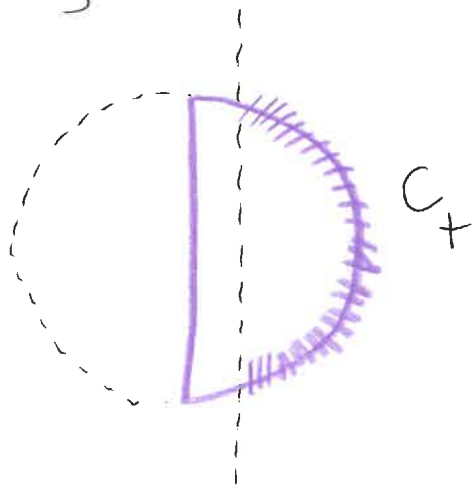
mise de C. Appliquons cela à

$$h(z) = (g(s) - g_T(s)) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right)$$

dont la valeur en $s=0$ est

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(s) - g_T(s)) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$$

Décomposons



et convergens par stimer l'intégrale large $\text{Re}(s) > 0$. on a:

$$\begin{aligned} |g(s) - g_T(s)| &= \left| \int_T^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \\ &\leq B \int_T^\infty e^{-\text{Re}(s)t} dt \\ &= B \left[\frac{e^{-\text{Re}(s)t}}{-\text{Re}(s)} \right]_T^\infty \\ &= B \frac{e^{-\text{Re}(s)T}}{\text{Re}(s)} \end{aligned}$$

③

Par ailleurs, toujours pour $\operatorname{Re}(s) > 0$ et $|s| = R$,

$$\left| e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{1}{s} \right| = \frac{1}{R} e^{\operatorname{Re}(s)T} \left| 1 + \frac{s^2}{R^2} \right|$$

Come $|s| = R$, on a

$$\left| 1 + \frac{s^2}{R^2} \right| = \left| \frac{s}{R} + \frac{R}{s} \right| = \frac{2 \operatorname{Re}(s)}{R}$$

si $s = R e^{i\theta}$, alors

$$\left| \frac{s}{R} + \frac{R}{s} \right| = |2 \cos \theta| = 2 \cos \theta = \frac{2 \operatorname{Re}(s)}{R}$$

donc

$$\left| e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{1}{s} \right| = \frac{2 \operatorname{Re}(s) e^{\operatorname{Re}(s)T}}{R^2}$$

On peut donc majorer la contribution de l'intégrale sur C_+ par:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} (g(s) - g_T(s)) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{ds}{s} \right| \\ & \leq B \frac{e^{-\operatorname{Re}(s)T}}{\operatorname{Re}(s)} \frac{2 \operatorname{Re}(s) e^{\operatorname{Re}(s)T}}{R^2} \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} ds \\ & = \frac{B}{R} \end{aligned}$$

Sont maintenant C_- la partie [du contour.

on considère les contributions de $g_T(s)$ et $g(s)$ séparément. Comme

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} g_T(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s}{R^2}\right) \frac{ds}{s},$$

l'intégrale que l'on voudrait calculer vaut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g_T(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C \cap \{\operatorname{Re}(s) < 0\}} g_T(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

On a dans cette région :

$$\begin{aligned} |g_T(s)| &= \left| \int_0^T f(t) e^{-st} dt \right| \leq B \int_0^T e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt \\ &\leq B \left[\frac{e^{-\operatorname{Re}(s)t}}{-\operatorname{Re}(s)} \right]_0^T \\ &\leq B \frac{e^{-\operatorname{Re}(s)T}}{\operatorname{Re}(s)} \end{aligned}$$

En cette région, l'égalité

$$\left| e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{1}{s} \right| = \frac{2 |\operatorname{Re}(s)|}{R^2} e^{\operatorname{Re}(s)T}$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g_T(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{ds}{s} \right| \\ \leq B e^{-\cancel{\operatorname{Re}(s)}T} \frac{2 \cancel{\operatorname{Re}(s)}}{R^2} e^{\cancel{\operatorname{Re}(s)}T} \frac{\cancel{R}}{2} \\ = \frac{B}{R} \end{aligned}$$

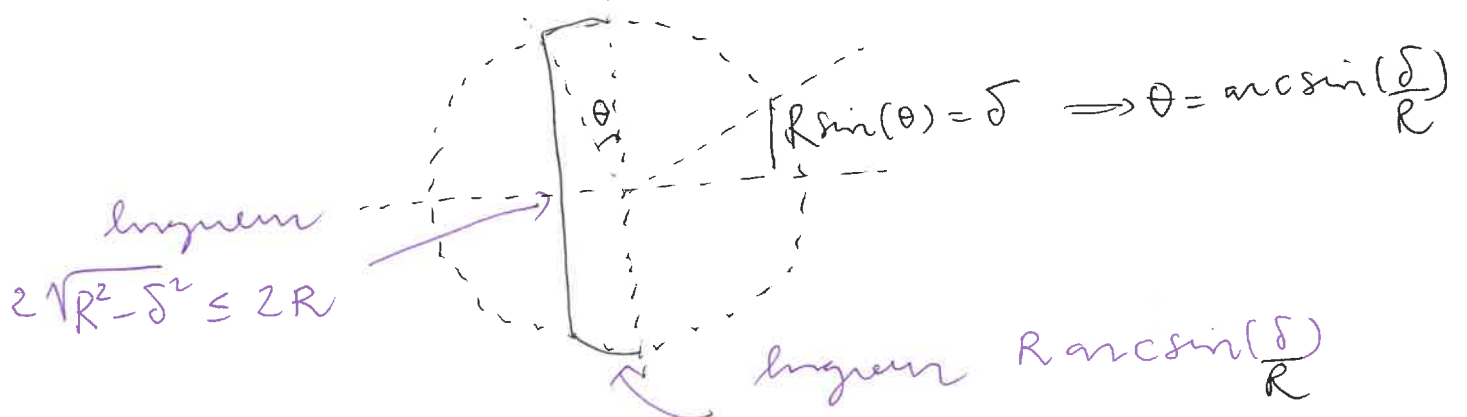
Il reste à majorer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{ds}{s}$$

Pour ce faire, posons

$$B' = \max_{s \in C_-} \left| g(s) \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{1}{s} \right|$$

le domaine d'intégration C_- consiste en



et on trouve donc la majoration

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C g(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s}{R}\right) \frac{ds}{s} \right|$$

$$\leq \frac{B' 2R e^{-\delta T}}{2\pi} + \frac{B' 2R \arcsin\left(\frac{\delta}{R}\right)}{2\pi}$$

$$\leq \frac{B' R}{\pi} (e^{-\delta T} + 2\delta)$$

pour δ assez petit

$e^{\operatorname{Re}(s)T} \leq 1$
sur les
arcs de
cercle

Au bout des comptes, on trouve:

$$|g(0) - g_T(0)| \leq \frac{B}{R} + \frac{B}{R} + \frac{B' R}{\pi} (2\delta + e^{-\delta T})$$

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $R = \frac{2B}{\varepsilon}$ et soit $\delta > 0$

assez petit pour que $\frac{2R\delta B'}{\pi} \leq \varepsilon$. Comme $e^{-\delta T} \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow +\infty$ et que la fonction $e^{-\delta T}$ est décroissante, il existe T_0 tel que

$\frac{R B'}{\pi} e^{-\delta T} < \varepsilon$ pour tout $T \geq T_0$. On a alors:

$$|g(0) - g_T(0)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

c'est-à-dire $\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0) = g(0)$

□

(5)

Remarque: Avec des modifications minimales, la même preuve donne le théorème de la progression arithmétique dans sa version la plus forte, c'est-à-dire : la fonction

$$\pi(X; a) = \left\{ p \leq X \mid \begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p \equiv a \pmod{N} \end{array} \right\}$$

satisfait à $\pi(X; a) \sim \frac{1}{\varphi(N)} \frac{X}{\log X}$

lorsque $X \rightarrow +\infty$. En effet,

* on introduit $\theta(X; a) = \sum_{\substack{p \leq X \\ p \equiv a}} \log p$

et on montre que

$$\theta(X; a) \sim \frac{X}{\varphi(N)} \Rightarrow \pi(X; a) \sim \frac{1}{\varphi(N)} \frac{X}{\log X}$$

* on montre qu'il suffit d'avoir la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\theta(t; a)}{t^2} - \frac{1}{\varphi(N)t} \right) dt$$

* on déduit la convergence de l'intégrale du théorème de Newman appliqué à

$$\frac{\Phi(s; a)}{s} - \frac{1}{\varphi(N)} \frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} \left(\theta(t; a) - \frac{1}{\varphi(N)t} \right) \frac{dt}{t^{s+1}}$$

