FEUILLE DE TD 5

Exercice 1. Soient a et b des entiers ≥ 1 premiers entre eux.

Le but de cet exercice est de démontrer la formule

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{ppcm}(a, a+b, a+2b, \dots, a+nb) = \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leq k<b \\ \operatorname{pgcd}(k,b)=1}} \frac{1}{k}.$$

(a) Rappeler pourquoi le résultat est vrai pour $a = b = 1$.

(b) Montrer que le côté gauche de l'égalité à démontrer est égal à

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \prod_{p\in\mathrm{S}} p,$$

où S est l'ensemble des nombres premiers p divisant un des termes $a, a+b, a+2b, \dots, a+nb$.

(c) Supposons $p \equiv k \bmod b$ et soit $\overline{k}$ le seul entier $1 \leq \overline{k} < b$ tel que $k\overline{k} \equiv a \bmod b$. Montrer que $p \in \mathrm{S}$ si et seulement si $p\overline{k} \leq a + bn$.

(d) Conclure en utilisant le théorème de la progression arithmétique sous la forme

$$\theta(\mathrm{X}; k) = \sum_{\substack{p\leq \mathrm{X} \\ p\equiv k \bmod b}} \log p \sim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{\mathrm{X}}{\varphi(b)}.$$

Exercice 2. Soit $(p_n)_{n\geq1}$ la suite des nombres premiers. Pour tout entier $k \geq 1$, posons

$$\mathrm{I}_k = \inf\{n \mid p_n > e^k\}, \quad \mathrm{I}_k = \inf\{n \mid p_n > e^{k-1/2}\},$$

et considérons les sommes

$$\mathrm{S}_k = \sum_{n<\mathrm{I}_k} \mathbb{1}_{[0,1/2]}(\{\log p_n\}), \quad \mathrm{S}_{k-1/2} = \sum_{n<\mathrm{I}_{k-1/2}} \mathbb{1}_{[0,1/2]}(\{\log p_n\}),$$

où $\mathbb{1}_{[0,1/2]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1/2]$ et $\{\cdot\}$ la partie fractionnaire.

(a) Démontrer l'égalité $\mathrm{S}_k = \mathrm{S}_{k-1/2}$.

(b) Déduire du théorème des nombres premiers que la limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_k}{\mathrm{I}_{k-1/2}}$$

existe et trouver sa valeur.

(c) Supposons que la suite $\{\log p_n\}_{n\geq1}$ soit équirépartie modulo 1. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{S}_k}{\mathrm{I}_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{S}_{k-1/2}}{\mathrm{I}_{k-1/2}} = \frac{1}{2}.$$

(d) Aboutir à une contradiction montrant que la suite $(\{\log p_n\})_{n\geq1}$ n'est pas équirépartie.

Exercice 3. Rappelons la notation $e(z) = z/|z|$ pour un nombre complexe non nul. Pour tout entier $m \in \mathbf{Z}$ multiple de 4, posons

$$\mathrm{L}_m(s) = \sum_{z\in\mathscr{N}} \frac{e(z)^m}{\mathrm{N}(z)^s},$$

où $\mathscr{N}$ désigne l'ensemble de classes d'équivalences de $\mathbf{Z}[i]$ modulo multiplication par les unités et $\mathrm{N}\colon \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}$ l'application norme, définie par $\mathrm{N}(a+bi) = a^2+b^2$. Soit $\mathscr{Q} \subset \mathscr{N}$ le sous-ensemble des éléments irréductibles.

(a) Démontrer l'égalité

$$\prod_{\pi \in \mathscr{Q}} \frac{1}{1 - e(\pi)\mathrm{N}(\pi)^{-s}} = \frac{1}{1-(-1)^{m/4}2^{-s}} \prod_{p \equiv 3 \bmod 4} \frac{1}{1-p^{-2s}} \prod_{p \equiv 1 \bmod 4} \frac{1}{1-e^{im\theta_p}p^{-s}} \frac{1}{1-e^{-im\theta_p}p^{-s}},$$

où $\theta_p \in (0, \frac{pi}{4})$ est le seul angle tel que $a + bi = \sqrt{p}e^{i\theta_p}$ si $p = a^2 + b^2$ avec $a > b > 0$.

(b) Démontrer que le produit eulérien

$$\prod_{\pi \in \mathscr{Q}} \frac{1}{1 - e(\pi)\mathrm{N}(\pi)^{-s}}$$

converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(c) En utilisant que $\mathbf{Z}[i]$ est factoriel, démontrer l'égalité

$$\mathrm{L}_m(s) = \prod_{\pi \in \mathscr{Q}} \frac{1}{1 - e(\pi)\mathrm{N}(\pi)^{-s}}$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.