Sorbonne Université
Année universitaire 2024-2025, master 1, *Théorie des nombres 1*. Corrigé intégral de la feuille de TD numéro 4.

Exercice 1

On raisonne par l'absurde, en supposant donc que α est rationnel et s'écrit p/q avec p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout entier n on peut par hypothèse écrire $a_n = \frac{\lambda_n}{r_n}$ et $b_n = \frac{\mu_n}{r_n}$ avec λ_n et μ_n dans $\mathbb{Z}$.

On peut alors écrire pour tout n l'égalité

$$\mathrm{L}_n = a_n + b_n\alpha = \frac{\lambda_n}{r_n} + \frac{\mu_n}{r_n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{q\lambda_n + p\mu_n}{qr_n}.$$

On a donc pour n assez grand l'inégalité

$$0 < \left| \frac{q\lambda_n + p\mu_n}{qr_n} \right| < C^n,$$

que l'on récrit

$$0 < |q\lambda_n + p\mu_n| < qC^n r_n$$

et comme $r_n < D^n$ pour n assez grand on en déduit que pour n assez grand on a l'encadrement

$$0 < |q\lambda_n + p\mu_n| < q(CD)^n.$$

Comme $CD < 1$ par hypothèse, le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en va alors de même de $|q\lambda_n + p\mu_n|$, mais comme cette quantité est entière pour tout n, cela signifie qu'elle est nulle à partir d'un certain rang, ce qui contredit le fait qu'elle est strictement positive pour tout n. Par conséquent, α est irrationnel.

Commentaires. On observera que la clef du raisonnement ci-dessus est simplement le fait élémentaire qu'un entier naturel strictement plus petit que 1 est nul (c'est comme cela qu'on démontre qu'une suite d'entiers naturels qui tend vers 0 est nulle à partir d'un certain rang). Pour simple qu'il soit, ce constat joue un rôle crucial en théorie des nombres et est un ingrédient essentiel de maintes démonstrations du domaine.

Exercice 2

Commençons par une remarque : les intégrales que l'on va manipuler dans la suite mettent en jeu des fonctions positives, et il n'y a donc pas lieu de justifier leur convergence en début de calcul, ni d'avoir des scrupules à utiliser le théorème de Fubini ou autres …... on peut les considérer *a priori* comme à valeurs dans $[0, +\infty]$ et les calculs montreront *a posteriori* qu'elles convergent. Cet exercice est donc en fait essentiellement un exercice d'algèbre (calcul de primitives, de développements en série…) et non d'analyse.

Question (1). On a

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 (\log x)x^{r+k}\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{r+k+1}}{r+k+1}\log x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{r+k}}{r+k+1}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\varepsilon^{r+k+1}}{r+k+1}\log\varepsilon - \left[\frac{x^{r+k+1}}{(r+k+1)^2}\right]_\varepsilon^1\\ &= -\frac{\varepsilon^{r+k+1}}{r+k+1}\log\varepsilon - \frac{1}{(r+k+1)^2} + \frac{\varepsilon^{r+k+1}}{(r+k+1)^2}.\end{aligned}$$

Question (2). On fait tendre ε vers 0 dans l'expression obtenue ci-dessus ; comme $r+k+1>0$ quels que soient les entiers r et k il vient

$$\int_0^1 (\log x)x^{r+k}\mathrm{d}x = \frac{-1}{(r+k+1)^2}.$$

(Question 3.) La clef pour cette question est le développement en série

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k\geqslant 0} u^k$$

valable dès que $|u|<1$.

$$\begin{aligned}I(r,s) &= \int_0^1\int_0^1 f_{r,s}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\left(\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}x^ry^s\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\left(\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty} -\log(xy)x^{k+r}y^{k+s}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1\left(\int_0^1((\log x)x^{k+r}y^{k+s} + (\log y)x^{k+r}y^{k+s})\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1\left(\int_0^1(\log x)x^{k+r}y^{k+s}\mathrm{d}x + \int_0^1(\log y)x^{k+r}y^{k+s}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1\left(\underbrace{-\frac{y^{k+s}}{(r+k+1)^2}}_{\text{d'après (2)}} + \frac{\log(y)y^{k+s}}{r+k+1}\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On a pour tout entier k les égalités

$$\int_0^1 \frac{y^{k+s}}{(r+k+1)^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{(k+s)(r+k+1)^2}$$

et

$$\int_0^1 \frac{\log(y)y^{k+s}}{(r+k+1)}\mathrm{d}y = -\frac{1}{(k+s+1)^2(r+k+1)},$$

la seconde résultant de la question (2). En réinjectant ces formules dans l'expression de $Ir, s)$ obtenue ci-dessus on obtient bien

$$I(r,s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)^2} + \frac{1}{(r+k+1)^2(s+k+1)}.$$

Question(4). On a par ce qui précède

$$\begin{aligned}
I(r,r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+k+1)(r+k+1)^2} + \frac{1}{(r+k+1)^2(r+k+1)} \\
&= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+k+1)^3} \\
&= 2\sum_{k=r+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \\
&= 2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^3}\right) \\
&= 2\left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^3}\right).
\end{aligned}$$

Question (5). Supposons $r > s$. Posons $u = r - s$. On a

$$\begin{aligned}
I(r,s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)^2} + \frac{1}{(r+k+1)^2(s+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(s+k+1+u)(s+k+1)^2} + \frac{1}{(s+k+1+u)^2(s+k+1)} \\
&= \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{(t+u)t^2} + \frac{1}{(t+u)^2 t} \\
&= \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{u+2t}{(t+u)^2 t^2} \\
&= \frac{1}{u} \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{u^2+2tu}{(t+u)^2 t^2} \\
&= \frac{1}{u} \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{(t+u)^2 - t^2}{(t+u)^2 t^2} \\
&= \frac{1}{u} \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+u)^2} \\
&= \frac{1}{u} \left(\sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} - \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{(t+u)^2} \right) \\
&= \frac{1}{u} \left(\sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} - \sum_{t=s+u+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} \right) \\
&= \frac{1}{u} \sum_{t=s+1}^{s+u} \frac{1}{t^2} \\
&= \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{u} \frac{1}{(s+k)^2} \\
&= \frac{1}{r-s} \sum_{k=1}^{r-s} \frac{1}{(s+k)^2}.
\end{aligned}$$

Question (6). On a par la question précédente

$$I(r,s) = \sum_{k=1}^{r-s} \frac{1}{(r-s)(s+k)^2}.$$

Pour tout k compris entre 1 et $r-s$, l'entier $s+k$ est non nul et majoré par r et divise donc d_r, et il en va de même de $r-s$. Par conséquent le produit $(r-s)(s+k)^2$ divise d_r^3 ; ceci valant pour tout k, le nombre rationnel $I(r,s)$ est de la forme $\frac{N}{d_r^3}$ avec N entier, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3

Question (1). Le polynôme $x^n(1-x)^n$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=n}^{2n}\lambda_i x^i$, où les λ_i sont entiers et où λ_{2n} est non nul (il vaut $(-1)^n$). Par conséquent

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \sum_{i=n}^{2n}\lambda_i \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^i \\ &= \sum_{i=n}^{2n}\lambda_i i(i-1)\dots(i-n+1)x^{i-n} \\ &= \sum_{i=n}^{2n}\lambda_i n!\binom{i}{n}x^i. \end{aligned}$$

Il en résulte que $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré exactement n, le coefficient de x^n étant $\lambda_{2n}\binom{2n}{n}$ qui est non nul.

Écrivons $P_n(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ où les a_i sont donc entiers, et où $a_n\neq 0$. On a alors

$$P_n(x)P_n(y)=\left(\sum_{0\leqslant i\leqslant n}a_i x^i\right)\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant n}a_i y^j\right)=\sum_{i,j}a_i a_j x^i y^j.$$

On voit ainsi que $a_{ii}=a_i^2$ pour tout i. Par conséquent $a_{ii}\geqslant 0$ pour tout i, et $a_{nn}>0$ puisque a_n est non nul.

Question (2). On a par définition

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(n) &= \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sum_{i,j}\int_0^1\int_0^1 -a_{ij}\frac{\log(xy)}{1-xy}x^i y^j \\ &= \sum_{i,j}a_{i,j}I_{i,j}. \end{aligned}$$

La formule $a_{ij}=a_i a_j$ donnée à l'exercice précédent montre que $a_{ij}=a_{ji}$ pour tout (i,j) et l'échange des variables x et y montre que $I_{ij}=I_{ji}$ pour tout (i,j). Il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(n) &= \sum_{0\leqslant i\leqslant n}a_{ii}I_{ii}+\sum_{i\neq j}a_{ij}I_{ij} \\ &= \sum_{0\leqslant i\leqslant n}a_{ii}I_{ii}+\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n}a_{ij}I_{ij}+a_{ji}I_{ji} \\ &= \sum_{0\leqslant i\leqslant n}a_{ii}I_{ii}+2\sum_{j<i}a_{ij}I_{ij} \\ &= \sum_{0\leqslant i\leqslant n}2\left(\zeta(3)-\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k^3}\right)+2\sum_{j<i}a_{ij}I_{ij} \end{aligned}$$

(où la dernière égalité provient de la question (4) de l'exercice 2), si bien que

$$\frac{\mathrm{J}(n)}{2}=\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\left(\zeta(3)-\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k^3}\right)+\sum_{j<i}a_{ij}I_{ij}.$$

Question (3). On sait par la question (6) de l'exercice (2) que chacune des intégrales I_{ij} pour $0 \leqslant j < i \leqslant n$ est de la forme $\frac{b_{ij}}{d_n^3}$ pour un certain entier b_{ij}. Par ailleurs tout entier k compris entre 1 et n divise d_n, si bien que $\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k^3}$ est de la forme $\frac{c}{d_n^3}$ pour un certain entier c. La formule ci-dessus donnant $J(n)/2$ entraîne alors que

$$\mathrm{J}(n) = 2(n+1)\zeta(3) - 2\frac{c}{d_n^3} + 2\sum_{j<i}\frac{b_{ij}}{d_n^3} = \frac{A_n + B_n\zeta(3)}{d_n^3}$$

où A_n et B_n sont des entiers, respectivement égaux à $2\left(\sum_{j<i} b_{ij}\right) - 2c$ et $2(n+1)d_n^3$.

Question (4). On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\mathrm{d}z &= \left[\frac{-\log(1-(1-xy)z)}{1-xy}\right]_0^1 \\ &= -\frac{\log(xy)}{1-xy}.\end{aligned}$$

Question (5). D'une manière générale si P et Q sont deux polynômes sur un corps K et si P^m divise Q pour un certain entier $m > 0$ on peut écrire $Q = P^m R$, et en dérivant on obtient $Q' = mP^{m-1}Q + P^m Q' = P^{m-1}(mQ+Q')$. En particulier P^{m-1} divise Q'. Par une récurrence immédiate on en déduit que P^{m-i} divise $Q^{(i)}$ pour tout $i \leqslant m$.

Ici $(x(1-x))^n$ divise q_n (il est même égal à q_n !). Par ce qui précède le polynôme $(x(1-x))^{n-k}$ divise $q_n^{(k)}$ pour tout k compris entre 0 et n ; lorsque k est $\leqslant n-1$ l'entier $n-k$ est strictement positif, ce qui entraîne que $x(1-x)$ divise $q_n^{(k)}$.

Question (6). La définition de $\mathrm{J}(n)$ et la question (4) permettent d'écrire

$$J(n) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}P_n(x)P_n(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Fixons y et z. On a alors

$$\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}P_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\frac{1}{n!}(q_n^{(n)}(x))\mathrm{d}x.$$

Nous allons montrer par récurrence sur k que pour tout k entre 0 et $n-1$ l'intégrale de droite de la formule ci-dessus est égale à

$$\int_0^1 \frac{(xy)^k}{(1-(1-xy)z)^{k+1}}\frac{k!}{n!}q_n^{(n-k)}(x)\mathrm{d}x.$$

L'égalité à montrer est évidente pour $k=0$. On suppose que $0 < k \leqslant n-1$ et nous allons montrer qu'elle vaut encore pour $k+1$. Pour ce faire, on calcule

$$\int_0^1 \frac{(xy)^k}{(1-(1-xy)z)^{k+1}}\frac{k!}{n!}q_n^{(n-k)}(x)\mathrm{d}x$$

en intégrant par parties. On obtient

$$\left[\frac{(xy)^k}{(1-(1-xy)z)^{k+1}}\frac{k!}{n!}q_n^{(n-k-1)}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(k+1)(xy)^{k+1}}{(1-(1-xy)z)^{k+2}}\frac{k!}{n!}q_n^{(n-k-1)}(x)\mathrm{d}x,$$

soit encore

$$\int_0^1 \frac{(xy)^{k+1}}{(1-(1-xy)z)^{k+2}}\frac{(k+1)!}{n!}q_n^{(n-k-1)}(x)\mathrm{d}x$$

puisque le terme entre crochets est nul, le polynôme $q_n^{(n-k-1)}(x)$ s'annulant en 0 et 1 d'après la question (5) ci-dessus. L'égalité voulue est donc vrai pour $k+1$, ce qui termine la démonstration de l'égalité voulue. On a donc

$$J(n) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(xy)^k}{(1-(1-xy)z)^{k+1}}\frac{k!}{n!}q_n^{(n-k)}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

pour tout k entre 0 et n, et la formule demandée s'obtient en faisant $k = n$ puisque

$$q_n^{(0)}(x) = q_n(x) = x^n(1-x)^n.$$

Exercice 4

Question (1). Montrons tout d'abord que $\varphi(D) \subset D$. Il s'agit de vérifier que si $(u, v, w) \in D^3$ alors

$$0 < \frac{1-w}{1-(1-uv)w} < 1.$$

L'inégalité de droite est évidente. Et pour l'inégalité de gauche, il suffit de remarquer que

$$\frac{1-w}{1-(1-uv)w} = \frac{1-(1-uv)w}{1-(1-uv)w} - \frac{uvw}{1-(1-uv)w} = 1 - \frac{uvw}{1-(1-uv)w} < 1.$$

Pour montrer que φ est une bijection, il suffit de prouver que tout triplet $(u, v, w) \in D$ a un unique antécédent dans D sous φ. Donnons-nous donc un tel triplet (u, v, w). Un antécédent de ce triplet dans D est un triplet $(u, v, z) \in D$ tel que

$$\begin{aligned} &\frac{1-z}{1-(1-uv)z} = w \\ \Longleftrightarrow\ & 1-z = w-(1-uv)zw \\ \Longleftrightarrow\ & 1-w = z(1-(1-uv)w) \\ \Longleftrightarrow\ & z = \frac{1-w}{1-(1-uv)w)}. \end{aligned}$$

Comme le triplet

$$\left(u, v, \frac{1-w}{1-(1-uv)w)}\right) = \varphi(u, v, w)$$

appartient bien à D puisque $\varphi(D) \subset D$, on voit que (u, v, w) a bien un unique antécédent par φ dans D, à savoir $\varphi(u, v, w)$. Par conséquent φ définit bien une bijection (et même une involution) de D dans D.

Question(2). La matrice jacobienne de φ (dont les colonnes sont les dérivées partielles de φ) est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A & B & \frac{-1+(1-uv)w+(1-uv)(1-w)}{(1-(1-uv)w)^2} \end{pmatrix}$$

où A et B sont des termes qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. Son déterminant est égal à

$$\frac{-1+(1-uv)w+(1-uv)(1-w)}{(1-(1-uv)w)^2} = \frac{-uv}{(1-(1-uv)w)^2}.$$

Question (3). Comme φ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de D sur lui-même, le changement de variable suggéré est licite, et doit faire intervenir la valeur absolue du déterminant jacobien calculé ci-dessus. Il vient (en écrivant $\int_D$ plutôt que les intégrales triples pour alléger les notations)

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(n) &= \int_D \frac{x^n y^n z^n (1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_D \frac{u^n v^n (1-w)^n (1-u)^n P_n(v) uv}{(1-(1-uv)w)^n (1-(1-uv)(\frac{1-w}{1-(1-uv)w}))^{n+1} (1-(1-uv)w)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \int_D \frac{(uv)^{n+1} n (1-w)^n (1-u)^n P_n(v)}{(1-(1-uv)w)^n (1-(1-uv)(\frac{1-w}{1-(1-uv)w}))^{n+1} (1-(1-uv)w)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Le dénominateur de cette intégrale se récrit

$$(1-(1-uv)w)^{n+2} \left(1-(1-uv)\frac{1-w}{1-(1-uv)w}\right)^{n+1}$$

soit encore

$$(1-(1-uv)w)\,(1-(1-uv)w-(1-uv)(1-w))^{n+1} = (1-(1-uv)w)(uv)^{n+1}.$$

Dans l'intégrande le terme en $(uv)^{n+1}$ du numérateur se simplifie avec celui qu'on vient de mettre en évidence au dénominateur, ce qui conduit à l'expression cherchée

$$J(n) = \int_D \frac{(1-w)^n (1-u))^n P_n(v)}{1-(1-uv)w} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Question (4). On procède exactement comme à la question (6) de l'exercice 3. On fixe u et w.

On a alors

$$\int_0^1 \frac{(1-w)^n (1-u)^n P_n(v)}{1-(1-uv)w} \mathrm{d}v = \int_0^1 \frac{(1-w)^n (1-u)^n}{1-(1-uv)w} \frac{1}{n!} q_n^{(n)}(v) \mathrm{d}v.$$

Nous allons montrer par récurrence sur k que pour tout k entre 0 et $n-1$ l'intégrale de droite de la formule ci-dessus est égale à

$$\int_0^1 \frac{u^k w^k (1-w)^n (1-u)^n}{(1-(1-uv)w)^{k+1}} \frac{k!}{n!} q_n^{(n-k)}(v) \mathrm{d}v.$$

L'égalité à montrer est évidente pour $k = 0$. On suppose que $0 < k \leqslant n-1$ et nous allons montrer qu'elle vaut encore pour $k+1$. Pour ce faire, on calcule

$$\int_0^1 \frac{u^k w^k (1-w)^n (1-u)^n}{(1-(1-uv)w)^{k+1}} \frac{k!}{n!} q_n^{(n-k)}(v)\mathrm{d}v$$

en intégrant par parties. On obtient

$$\left[\frac{u^k w^k (1-w)^n (1-u)^n}{(1-(1-uv)w)^{k+1}} \frac{k!}{n!} q_n^{(n-k-2)}(v)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(k+1)u^{k+1} w^{k+1} (1-w)^n (1-u)^n}{(1-(1-uv)w)^{k+2}} \frac{k!}{n!} q_n^{(n-k-1)}(v)\mathrm{d}v,$$

soit encore

$$\int_0^1 \frac{u^{k+1} w^{k+1} (1-w)^n (1-u)^n}{(1-(1-uv)w)^{k+2}} \frac{(k+1)!}{n!} q_n^{(n-k-1)}(v)\mathrm{d}v$$

puisque le terme entre crochets est nul, le polynôme $q_n^{(n-k-1)}(v)$ s'annulant en 0 et 1 d'après la question (5) de l'exercice 3. L'égalité voulue est donc vrai pour $k+1$, ce qui termine la démonstration de l'égalité voulue. En réinjectant ceci dans la formule trouvée pour $\mathrm{J}(n)$ à la question précédente on voit que

$$J(n) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^k w^k (1-w)^n (1-u)^n}{(1-(1-uv)w)^{k+1}} \frac{k!}{n!} q_n^{(n-k)}(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

pour tout k entre 0 et n, et la formule demandée s'obtient en faisant $k = n$ puisque

$$q_n^{(0)}(v) = q_n = (v) = v^n(1-v)^n.$$

Exercice 5

Question (1). On remarque que

$$1-(1-uv)w = (1-w) + uvw = \sqrt{1-w}^2 + \sqrt{uvw}^2,$$

si bien que

$$1-(1-uv)w - 2\sqrt{1-w}\sqrt{uvw} = (\sqrt{1-w} - \sqrt{uvw})^2 \geqslant 0.$$

Question (2). On a

$$\begin{aligned} g(u,v,w) &= \frac{u(1-u)v(1-v)w(1-w)}{1-(1-uv)w} \\ &\leqslant \frac{u(1-u)v(1-v)w(1-w)}{2\sqrt{1-w}\sqrt{uvw}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{u}(1-u)\sqrt{v}(1-v)\sqrt{w(1-w)} \end{aligned}$$

(attention, il y avait une erreur dans la question, le $1-w$ doit bien être sous la racine).

Question (3). La fonction $t \mapsto t(1-t^2) = t - t^3$ a pour dérivée $t \mapsto 1 - 3t^2$. Sur $[0,1]$ cette dérivée est strictement positive pour $t < \frac{1}{\sqrt{3}}$, s'annule en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et est strictement négative pour $t > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, la fonction étudiée atteint son maximum strict en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, où elle vaut $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

La fonction $t \mapsto t(1-t) = t - t^2$ a pour dérivée $t \mapsto 1 - 2t$. Sur $[0,1]$ cette dérivée est strictement positive pour $t < \frac{1}{2}$, s'annule en $\frac{1}{2}$ et est strictement négative pour $t > \frac{1}{2}$. Par conséquent, la fonction étudiée atteint son maximum strict en $\frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$.

Question (4). Pour tout triplet (u,v,w) d'éléments de $(0,1)$ on a d'après la question (2) l'inégalité

$$\begin{aligned} g(u,v,w) &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{u}(1-u)\sqrt{v}(1-v)\sqrt{w(1-w)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{u}(1-\sqrt{u}^2)\sqrt{v}(1-\sqrt{v}^2)\sqrt{w(1-w)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(l'avant-dernière inégalité résultant de la question (3) ci-dessus).

Question (5). La question (4) de l'exercice 5 assure que

$$\mathrm{J}(n) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 g(u,v,w)^n \frac{1}{1-(1-uv)w}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

et la question précédente fournit donc la majoration

$$\mathrm{J}(n) \leqslant \left(\frac{1}{27}\right)^n \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(1-uv)w}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

et l'intégrale de droite peut en vertu de la question (4) de l'exercice (3) se récrire

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{-\log(uv)}{1-uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

qui n'est autre que $I(0,0)$, c'est-à-dire $2\zeta(3)$ d'après la formule établie à la question (4) de l'exercice 2. On a donc bien

$$\mathrm{J}(n) \leqslant 2\frac{\zeta(3)}{27^n}.$$

Compte-tenu de la question (3) de l'exercice (2), on obtient bien l'existence pour tout $n \geqslant 1$ d'entiers A_n et B_n tels que

$$0 < \frac{A_n}{d_n^3} + \frac{B_n}{d_n^3}\zeta(3) \leqslant 2\frac{\zeta(3)}{27^n}.$$

Comme $2\zeta(3)\left(\frac{26}{27}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, cette quantité est strictement inférieure à 1 pour n assez grand. Par conséquent

$$0 < \frac{A_n}{d_n^3} + \frac{B_n}{d_n^3}\zeta(3) \leqslant \frac{1}{26^n}$$

pour n assez grand.

Pour conclure à l'irrationalité de $\zeta(3)$ il suffit au vu du critère dégagé à l'exercice 1 d'exhiber un réel D tel que $0 < D < 26$ et tel que $d_n^3 \leqslant D^n$ pour n assez grand.

Or il découle du théorème des nombres premiers que $d_n = \exp(n + o(n))$ (exercice 10 de la feuille 1). Par conséquent, $d_n^3 = \exp(3n + o(n))$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc $d_n^3 \leqslant \exp((3 + \varepsilon)n)$ pour n assez grand. Or $\exp(3) < 26$ (voir la justification ci-dessous). Par conséquent il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $D := \exp(3 + \varepsilon) < 26$, et on a bien par construction $d_n^3 \leqslant D^n$ pour n assez grand.

Majoration de $\exp(3)$**.** Il n'est évidemment pas déraisonnable de faire confiance à la calculatrice qui indique que $\exp(3) = 20,085\ldots$ Mais ne trichons pas et astreignons-nous à le justifier proprement.

On a

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k\geqslant 4} \frac{1}{k!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{4^k} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{18 + 18 + 9 + 4}{18} \\ &= \frac{49}{18}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \exp(3) &< \frac{(50-1)^3}{(20-2)^3} \\ &= \frac{125\,000 - 3 \cdot 2500 + 3 \cdot 50 - 1}{8000 - 3 \cdot 2 \cdot 400 + 3 \cdot 20 \cdot 4 - 8} \\ &= \frac{117\,649}{5832} \\ &< 21, \end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant du fait que $5832 \cdot 21 = 116\,640 + 5832 = 122\,472$.

Commentaires. Dans les manipulations d'inégalités du dernier exercice nous avons utilisé à maintes reprises implicitement le fait que les quantités manipulées étaient positives.