FEUILLE DE TD 4

Le but de cette feuille d'exercices est de démontrer l'irrationalité de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

suivant une méthode due à Beukers (1979).

Exercice 1 (Un critère d'irrationalité)**.** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un nombre réel. Supposons données, pour chaque $n \geq 1$, des combinaisons linéaires

$$\mathrm{L}_n = a_n + b_n\alpha \quad \text{with} \quad a_n, b_n \in \mathbf{Q}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

(a) il existe un nombre réel $\mathrm{C} \in (0,1)$ tel que $0 < |\mathrm{L}_n| \leq \mathrm{C}^n$ pour tout n assez grand ;

(b) si r_n désigne le dénominateur commun de a_n et b_n, alors il existe un nombre réel $\mathrm{D} > 0$ tel que $r_n < \mathrm{D}^n$ pour tout n assez grand ;

(c) on peut choisir C et D ci-dessus satisfaisant à $\mathrm{CD} < 1$.

Démontrer que le nombre α est irrationnel.

Exercice 2. Soient $r, s \geq 0$ des nombres entiers. Pour $x, y \in (0,1)$, on considère la fonction

$$f_{r,s} = -\frac{\log(xy)}{1-xy} x^r y^s,$$

ainsi que l'intégrale

$$\mathrm{I}(r,s) = \int_0^1 \int_0^1 f_{r,s}(x,y)\ dx\ dy.$$

(1) Pour $k \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, calculer l'intégrale

$$\int_\varepsilon^1 (\log x) x^{r+k} dx.$$

(2) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 (\log x) x^{r+k}\ dx = \frac{-1}{(r+k+1)^2}$$

(3) Montrer l'égalité

$$\mathrm{I}(r,s) = -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{(\log y) y^{s+k}}{r+k+1} - \frac{y^{s+k}}{(r+k+1)^2} \right)\ dy,$$

puis en déduire l'égalité

$$\mathrm{I}(r,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)^2} + \frac{1}{(r+k+1)^2(s+k+1)} \right).$$

(4) Montrer que, pour $r = s$, on a

$$\mathrm{I}(r,r) = 2\left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^3} \right).$$

(5) Montrer que, pour $r > s$, on a

$$\mathrm{I}(r,s) = \frac{1}{r-s}\sum_{k=1}^{r-s}\frac{1}{(s+k)^2}.$$

(6) Soit $d_r = \mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,r)$. Pour $r > s$, soient a et b des entiers premiers entre eux tels que $\mathrm{I}(r,s) = \frac{a}{b}$. Montrer que b divise d_r^3.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $q_n(x) = x^n(1-x)^n$. On pose

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{n!}q_n^{(n)}(x),$$

où $q_n^{(n)}(x)$ désigne la dérivée n-ième.

(1) Montrer que $\mathrm{P}_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients entiers. On écrit

$$\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_n(y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x^iy^j$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $i = 1,\ldots,n$, on a $a_{ii} \geqslant 0$ et $a_{nn} > 0$.

On considère l'intégrale

$$\mathrm{J}(n) = \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_n(y)dx\ dy.$$

(2) Montrer l'égalité suivante :

$$\frac{\mathrm{J}(n)}{2} = \sum_{i=1}^n a_{ii}\left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^i\frac{1}{k^3}\right) + \sum_{i>j}a_{ij}\mathrm{I}(i,j).$$

(3) Soit $d_n = \mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)$. Conclure qu'il existe des entiers $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$ avec $\mathrm{B}_n \geqslant 1$ tels que

$$\mathrm{J}(n) = \frac{\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n\zeta(3)}{d_n^3}.$$

(4) Montrer que pour tous $x, y \in (0,1)$ on a

$$-\frac{\log(xy)}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\ dz.$$

(5) Soit $0 \leqslant k \leqslant n-1$ un entier. Montrer que $q_n^{(k)}(x)$ est divisible par $x(1-x)$.

(6) En intégrant par parties à plusieurs reprises, montrer l'égalité

$$\mathrm{J}(n) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^ny^nz^n(1-x)^n\mathrm{P}_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\ dx\ dy\ dz.$$

Exercice 4. Soit $\mathrm{D} = (0,1)^3$. Pour $(u,v,w) \in \mathrm{D}$, soit

$$\varphi(u,v,w) = \left(u, v, \frac{1-w}{1-(1-uv)w}\right).$$

(1) Montrer que φ définit une bijection de D dans D.

(2) Calculer $\det(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial w})$.

(3) En faisant le changement de variables $(x,y,z) = \varphi(u,v,w)$, montrer que

$$\mathrm{J}(n) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1-w)^n(1-u)^n\frac{\mathrm{P}_n(v)}{1-(1-uv)w}\ du\ dv\ dw.$$

(4) De manière similaire, montrer que

$$\mathrm{J}(n) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^n(1-u)^n v^n(1-v)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-uv)w)^{n+1}}\, du\, dv\, dw.$$

Exercice 5. Soit $\mathrm{D} = (0,1)^3$. On considère la fonction $g\colon \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,v,w) = \frac{u(1-u)v(1-v)w(1-w)}{1-(1-uv)w}.$$

(1) Pour tous $u, v, w \in (0,1)$, montrer l'inégalité

$$1-(1-uv)w \geqslant 2\sqrt{1-w}\sqrt{uvw}.$$

(2) Déduire l'inégalité

$$g(u,v,w) \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{u}(1-u)\sqrt{v}(1-v)\sqrt{w}(1-w).$$

(3) Trouver le maxima des fonctions $t \mapsto t(1-t^2)$ et $t \mapsto t(1-t)$ pour $t \in [0,1]$.

(4) Déduire que, pour tout $u, v, w \in (0,1)$, on a $g(u,v,w) \leqslant \frac{1}{27}$.

(5) En appliquant l'exercice précédent, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 < \mathrm{J}(n) \leqslant \frac{2}{27^n}\zeta(3).$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$, il existe des entiers $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$ avec $\mathrm{B}_n \geqslant 1$ tels que

$$0 < |\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n\zeta(3)| \leqslant \frac{d_n^3}{27^n} 2\zeta(3),$$

où $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$.

(6) Conclure que $\zeta(3)$ est irrationnel.