

COURS 9 (26 mars 2024)

FORME DE JORDAN D'UN ENDOMORPHISME
NILPOTENT① La suite des noyaux

Proposition: Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence d .

(1) on a une suite croissante:

$$\{0\} = \ker(\text{Id}_V) \subseteq \ker(u) \subseteq \ker(u^2) \subseteq \dots \subseteq \ker(u^d) = V$$

Posons $K_i = \dim \ker(u^i)$

(2) Soit $q_i = K_i - K_{i-1}$ pour $i=1, \dots, d$.

Alors $q_{i-1} \geq q_i$ pour $i=2, \dots, d$.

(3) $\ker(u^{i-1}) \subsetneq \ker(u^i)$ pour tout $i=1, \dots, d$.

En particulier, $d \leq n$.

(4) La suite $(q_1, \dots, q_d)$ est une partition de n (i.e. $q_i \geq 1$ pour tout $i=1, \dots, d$ et leur somme $q_1 + \dots + q_d$ est égale à n). La suite $(K_1, K_2, \dots, K_d)$ est la suite des sommes partielles de $(q_1, \dots, q_d)$, i.e. $K_i = \sum_{j=1}^i q_j$.

Démonstration :

(1) Si $x \in \text{Ker}(u^i)$, alors $u^{i+1}(x) = u(\underbrace{u^i(x)}_0)$
8 nul, donc $x \in \text{Ker}(u^{i+1})$.

(2) Fixons un indice i et soit $q = q_i$.
Soit $\beta = (e_1, \dots, e_q)$ une bse d'une supplémentation
de $\text{Ker}(u^{i-1})$ dans $\text{Ker}(u^i)$. Supposons

$$x + t_1 u(e_1) + \dots + t_q u(e_q) = 0 \quad \begin{array}{l} x \in \text{Ker}(u^{i-2}) \\ t_1, \dots, t_q \in \mathbb{K} \end{array}$$

En appliquant u^{i-2} :

$$u^{i-1}(t_1 e_1 + \dots + t_q e_q) = 0$$

donc $t_1 e_1 + \dots + t_q e_q \in \text{Ker}(u^{i-1})$, donc
 $t_1 = \dots = t_q = 0$ car $e_1, \dots, e_q$ est une bse
de son supplémentation. On en déduit $x = 0$.

Par conséquent, $\text{Ker}(u^{i-2}) \subset \text{Ker}(u^{i-1})$

$$\text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_q))$$

sont une somme directe, d'où :

$$\begin{aligned} K_{i-2} + q &= \dim(\text{Ker}(u^{i-2}) \oplus \text{Vect}(u(e_1), \dots)) \\ &\leq K_{i-1} \end{aligned}$$

$$\text{donc } q_i = q \leq K_{i-1} - K_{i-2} = q_{i-1}$$

(En fait, on a démontré que si β_i est une base du supplément de $\ker(u^{i-1})$ dans $\ker(u^i)$, alors la famille $u(\beta_i)$ est liée et peut se compléter en une base du supplément de $\ker(u^{i-2})$ dans $\ker(u^{i-1})$)

(3) Si $\ker(u^{i-1}) = \ker(u^i)$ pour un $i \leq d$, alors $q_i = 0$, donc $q_{i+1} = \dots = q_d = 0$ par (2), d'où $\ker(u^{i-1}) = \ker(u^d) = V$. Mais alors $u^{i-1} = 0$, ce qui contredit le fait que l'indice de nilpotence soit d .

Par conséquent, $\dim \ker(u^i) \geq i$ pour $i = 1, \dots, d$, et donc $d \leq n$ car V est de dimension n .

(4) Par définition,

$$K_1 = q_1, \quad K_2 = q_2 + K_1 = q_2 + q_1$$

$$K_i = q_i + K_{i-1} = q_i + \dots + q_1$$

et finalement

$$n = K_d = q_d + \dots + q_1$$

□

② Block de Jordan

Définition. Soit $n \geq 1$ un entier. on appelle bloc de Jordan nilpotent de taille n la matrice

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de K^n , J_n représente l'endomorphisme

$$J_n e_1 = 0$$

$$J_n e_i = e_{i-1} \text{ pour } i=2, \dots, n$$

C'est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n .

Définition. on appelle matrice de Jordan nilpotente de taille n une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{p_1}} & & \\ & \boxed{J_{p_2}} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{p_d}} \end{pmatrix}$$

avec

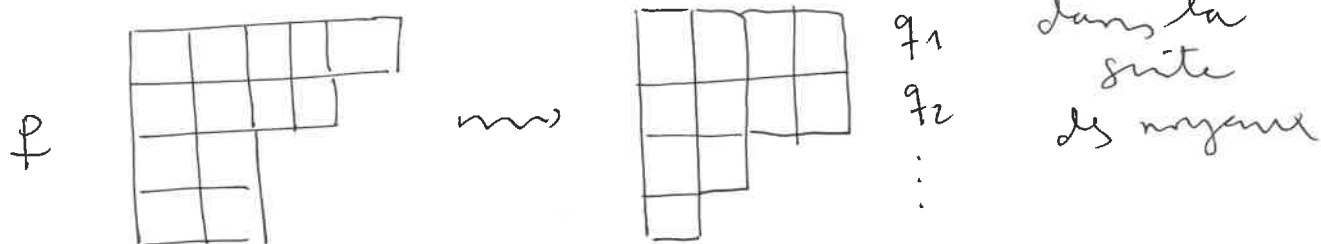
$$p_1 \geq \dots \geq p_d \geq 1$$

③ Fonctionnelle de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

Théorème. Soient V un K -espace vectoriel de dimension n et $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence d .

(1) Il existe une base β de V dans laquelle la matrice de u est une matrice de Jordan J_β pour une partition f de n .

(2) la partition f est uniquement déterminée par u :



En particulier, f a d au $\text{Ker}(u)$ parts et la plus grande est d .

On dit que J_β est la fonctionnelle de Jordan de l'endomorphisme nilpotent u .

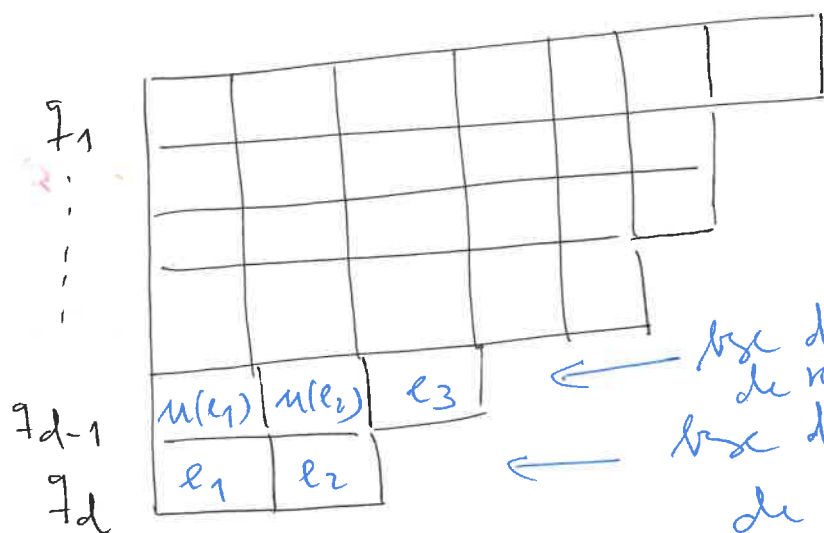
Démonstration: Soit $q = (q_1, \dots, q_d)$ la partition de n associée à la suite des moyennes.

Soit $\beta_d = (e_1, \dots, e_{q_d})$ une base d'un supplémentaire de $\ker(u^{d-1})$ dans $\ker(u^d) = V$. Alors la famille $u(\beta_d)$ est libre et il reste

$$\beta_{d-1} = (e_{q_d+1}, \dots, e_{q_d-1})$$

telle que $u(\beta_d) \cup \beta_{d-1}$ sont une base d'un supplémentaire de $\ker(u^{d-2})$ dans $\ker(u^{d-1})$.

$\Rightarrow \beta_d \cup u(\beta_d) \cup \beta_{d-1}$ est une base d'un supplémentaire de $\ker(u^{d-2})$ dans V .



Il existe une famille

$$\beta_{d-2} = (e_{q_{d-1}+1}, \dots, e_{q_{d-2}}) \subset \ker(u^{d-2})$$

Unité: Soit $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ une base dans laquelle la matrice de u est J_f pour une partition $f = (p_1, \dots, p_s)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & \\ \hline & & & \\ \hline & & & | \\ \hline & & & \\ \hline & v_n & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u^{p-1}(v_1) & u^{p-2}(v_1) & \dots \\ \hline & & \\ \hline & & | \\ \hline & & \\ \hline & & | \\ \hline \end{array}$$

et en général la ligne j est formée de $u^{p_j-1}(e_j), \dots, u(e_j), e_j$.

Donc, on transporte le ligand

$M^{p_1-1}(v_1)$	← base de $\text{Ker}(u)$
$M^{p_1-2}(v_1)$	
$\vdots$	← base de $\text{Ker}(u^2)$
v_1	

et donc la partition $\tilde{p}$ est elle associée
à la suite des noyaux de μ

telle que $L_{d-2} = u(L_{d-1}) \cup \beta_{d-2}$

$$= u^2(\beta_d) \cup u(\beta_{d-1}) \cup \beta_{d-2}$$

soit un bsc d'un supplémentaire de $\ker(u^{d-3})$,
dans $\ker(u^{d-2})$. Alors

$$\beta_d \cup L_{d-1} \cup L_{d-2}$$

$$= \beta_d \cup u(\beta_d) \cup \beta_{d-1} \cup u^2(\beta_d) \cup u(\beta_{d-1}) \cup \beta_{d-2}$$

est un bsc d'un supplémentaire de $\ker(u^{d-3})$ dans V .

$u^2(e_1)$	$u^2(e_2)$	$u(e_3)$	e_4	
$u(e_1)$	$u(e_2)$	e_3		
e_1	e_2			

À la fin du processus, on a obtenu une
base de l'espace vectoriel V . Chaque colonne
du diagramme donne une famille de vecteurs
dans laquelle la structure de u a une
matrice T_{p_j} , où p_j est la taille de la
colonne. Dans cette base, u est une repé-
sentée par une matrice de Jordan.