

① Espaces caractéristiques

Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dim n .
 Soit $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme. Rappelons que
 les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$ de u sont les racines
 du polynôme caractéristique et que l'on appelle
multiplicité algébrique de λ sa multiplicité avec
 racine de $P_u(X) = \det(u - X \text{Id})$.

Définition: Soit λ une valeur propre de multi-
 plicité algébrique m . Le sous-espace caractéristique
 associé à λ est

$$V_{(\lambda)} = \ker((u - \lambda \text{Id})^m) \subset V.$$

* L'espace caractéristique contient l'espace propre
 $V_{\lambda} = \ker(u - \lambda \text{Id})$. En effet, avec $m \geq 1$, on
 écrit $(u - \lambda \text{Id})^m = (u - \lambda \text{Id})^{m-1} \circ (u - \lambda \text{Id})$,

et si $v \in V_{\lambda}$, alors

$$(u - \lambda \text{Id})^m(v) = (u - \lambda \text{Id})^{m-1} \underbrace{((u - \lambda \text{Id})(v))}_0 = 0$$

c'est-à-dire $v \in V_{(\lambda)}$. En général, l'inclusion
 $V_{\lambda} \subset V_{(\lambda)}$ est stricte. Par exemple, soit $V = \mathbb{C}^2$

et soit $u: V \rightarrow V$ l'endomorphisme $u(e_1) = 0$ donc
 $u(e_2) = e_1$
 par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$P_u(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{pmatrix} = X^2,$$

donc $\lambda = 0$ est valeur propre de multiplicité algébrique 2.

On a :

$$V_0 = \ker(u) = \text{Vect} \langle e_1 \rangle$$

$$V_{(1)} = \ker(u^2) = \text{Vect} \langle e_1, e_2 \rangle$$

car u^2 est identiquement nul.

* L'espace caractéristique est stable par u :

$$u(V_{(1)}) \subset V_{(1)}$$

En effet, on écrit $u = (u - \lambda \text{Id}) + \lambda \text{Id}$ et $V_{(1)}$ est stable par λId (car c'est un sous-espace vectoriel) et par $u - \lambda \text{Id}$ car si $v \in V_{(1)}$

$$(u - \lambda \text{Id})^m ((u - \lambda \text{Id})(v))$$

$$= (u - \lambda \text{Id}) \left(\underbrace{(u - \lambda \text{Id})^m}_{=0}(v) \right) = 0.$$

② Décomposition en espaces caractéristiques

Théorème : Soit $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n . Écrivons

$$P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de multipliquité algébres $m_1, \dots, m_r$. Alors:

$$(1) \quad V = V_{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus V_{(\lambda_r)}$$

$$(2) \quad \dim V_{(\lambda_i)} = m_i \quad \text{pour } i=1, \dots, r.$$

Démonstration. Pour $i=1, \dots, r$, posons

$$P_i(X) = (-1)^{n_i} \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}.$$

Comme $P_1, \dots, P_r$ n'ont pas de racines communes, par le théorème de Bézout il existe $S_1, \dots, S_r \in \mathbb{C}[X]$ tels que $1 = P_1 S_1 + \dots + P_r S_r$. En appliquant cette identité à l'endomorphisme u on trouve

$$= P_1(u) \circ S_1(u) + \dots + P_r(u) \circ S_r(u)$$

Tout $v \in V$ peut donc s'écrire avec

$$v = P_1(u)(x_1) + \dots + P_r(u)(x_r)$$

avec $x_i = S_i(u)(v)$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $P_u(u) = 0$.

Comme $P_u(X) = (X - \lambda_i)^{m_i} P_i(X)$ pour tout $i=1, \dots, r$,

on trouve

$$(u - \lambda_i \text{Id})^{m_i} P_i(u)(x_i) = 0$$

ce qui implique

$$p_i(u)(x_i) \in \ker(u - \lambda_i \text{Id})^{m_i} = V_{(\lambda_i)}$$

on a donc écrit $v = v_1 + \dots + v_r$ avec $v_i = p_i(u)(x_i)$
dans $V_{(\lambda_i)}$: $V = V_{(\lambda_1)} + \dots + V_{(\lambda_r)}$

Démontrons maintenant que la somme est directe.
Si $v_1 + \dots + v_r = 0$ avec $v_i \in V_{(\lambda_i)}$, alors

$$v_i = - \sum_{j \neq i} v_j \in V_{(\lambda_i)} \cap \sum_{j \neq i} V_{(\lambda_j)}$$

est annulé par $(u - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$ et $p_i(u)$.

Come les polynômes $(X - \lambda_i)^{m_i}$ et $p_i(X) = (-1)^n \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$

n'ont pas de racine commune, à nouveau par Bézout il existe $R, T \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$1 = R p_i + T (X - \lambda_i)^{m_i}$$

d'où en appliquant cette identité à u , puis à v_i :

$$v_i = R(u) \underbrace{[p_i(u)(v_i)]}_0 + T(u) \underbrace{[(u - \lambda_i \text{Id})^{m_i}(v_i)]}_0$$

$$= 0$$

pour tout $i = 1, \dots, r$, ce qu'il fallait démontrer.

$$V = V_{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus V_{(\lambda_r)}$$

(3)

Démontrons enfin (2). Soient $d_i = \dim V(\lambda_i)$ et β_i une base de $V(\lambda_i)$. Comme $V = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_r)$, $\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_r$ est une base de V dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

car $V(\lambda_i)$ est stable par u . on a donc

$$(*) \quad p_u(X) = p_{u_1}(X) \dots p_{u_r}(X)$$

avec $u_i = u|_{V(\lambda_i)}: V(\lambda_i) \rightarrow V(\lambda_i)$. Soit μ une valeur propre de u_i et X un vecteur propre (en particulier, $X \neq 0$). Alors:

$$\begin{aligned} (\mu_i - \lambda_i \text{Id})(X) &= u_i(X) - \lambda_i X \\ &= \mu X - \lambda_i X \\ &= (\mu - \lambda_i) X \end{aligned}$$

et en itérant

$$0 = (\mu_i - \lambda_i \text{Id})^{m_i}(X) = (\mu - \lambda_i)^{m_i} X,$$

d'où $(\mu - \lambda_i)^{m_i} = 0$, c'est-à-dire $\mu = \lambda_i$ est la seule valeur propre. on a donc

$$p_{u_i}(X) = (-1)^{d_i} (X - \lambda_i)^{d_i}$$

d'où $d_i = m_i$ en utilisant l'égalité (*). $\square$

③ Endomorphismes nilpotents

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme.

Définition. on dit que u est nilpotent s'il existe un entier n tel que $u^n = 0$.
le plus petit n avec cette propriété s'appelle l'indice de nilpotence de u .

Exemple: l'endomorphisme de $V = \mathbb{C}^3$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotent d'indice de nilpotence 3. En effet,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lemme: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire ayant des 0 sur la diagonale). Alors $A^n = 0$, c'est-à-dire A est nilpotente d'indice de nilpotence $\leq n$.

Preuve: le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (-1)^n X^n$. Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, on trouve par le théorème de Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$, c'est-à-dire

④

$A^n = 0$. Faisons une autre preuve qui fonctionne sur un corps K arbitraire.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n et soit $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) \subset K^n$, avec la convention $F_0 = \{0\}$. Si A est triangulaire supérieure stricte, alors

$$A(F_i) \subseteq F_{i-1}$$

pour tout $i=1, \dots, n$. On a donc :

$$A^n(K^n) = A^n(F_n) = A^{n-1}(\underbrace{A(F_n)}_{\subset F_{n-1}})$$

$$\subseteq A^{n-1}(F_{n-1}) = A^{n-2}(\underbrace{A(F_{n-1})}_{\subset F_{n-2}})$$

$$\subseteq \dots \subseteq F_0 = \{0\}$$

□

c'est-à-dire $A^n = 0$

⑤ Décomposition de Dunford

Théorème : Soit $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V . Il existe une unique paire (d, n) d'endomorphismes de V tels que :

(1) $u = d + n$

(2) d est diagonalisable

(3) n est nilpotent

(4) $d \circ n = n \circ d$ (« d et n commutent »)

Démonstration: Existence: factorisons le polynôme caractéristique en

$$P_M(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

et soit $V_{(\lambda_i)}$ l'espace caractéristique associé à λ_i .

on a alors

$$V = V_{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus V_{(\lambda_r)}$$

et tout $v \in V$ s'écrit de manière unique comme

$$v = v_1 + \dots + v_r \quad \text{avec } v_i \in V_{(\lambda_i)}$$

Définissons les endomorphismes d et n par:

$$d(v) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$$

$$n(v) = (M - \lambda_1 \text{Id})v_1 + \dots + (M - \lambda_r \text{Id})v_r$$

Alors $M = d + n$ et d est diagonalisable.

L'endomorphisme n est nilpotent car

$$n(v) = \underbrace{(M - \lambda_1 \text{Id})v_1}_{\in V_{(\lambda_1)}} + \dots + \underbrace{(M - \lambda_r \text{Id})v_r}_{\in V_{(\lambda_r)}}$$

$$\Rightarrow n^2(v) = (M - \lambda_1 \text{Id})^2 v_1 + \dots + (M - \lambda_r \text{Id})^2 v_r$$

et si $k = \max(m_1, \dots, m_r)$, alors

$$\begin{aligned} n^k(v) &= \underbrace{(M - \lambda_1 \text{Id})^k}_{=0} v_1 + \dots + \underbrace{(M - \lambda_r \text{Id})^k}_{=0} v_r \\ &= 0 \end{aligned}$$

(5)

Finalement, d et n commutent :

$$\begin{aligned} d(n(v)) &= \sum_{i=1} \lambda_i (n - \lambda_i \text{Id}) (v_i) \\ &= \sum_{i=1} (n - \lambda_i \text{Id}) (\lambda_i v_i) \\ &= n(d(v)) \end{aligned}$$

Unité : Supposons que $n = d' + n'$ est une autre décomposition ayant les mêmes propriétés. Alors :

$$\begin{aligned} d' \circ n &= d' \circ (d' + n') = d' \circ d' + d' \circ n' \\ &= d' \circ d' + n' \circ d' = (d' + n') \circ d' \\ &= n \circ d' \end{aligned}$$

c'est-à-dire n et d' commutent. On en déduit :

$$d'(V(\lambda_i)) \subset V(\lambda_i)$$

(en effet, si $x \in V(\lambda_i)$, alors

$$(n - \lambda_i \text{Id})^{m_i}(d'(x)) = d'(\underbrace{(n - \lambda_i \text{Id})^{m_i}(x)}_{=0})$$

Comme $d|_{V(\lambda_i)} = \lambda_i \cdot \text{Id}$, d et d' commutent sur eux. On utilise alors le théorème en TD pour dire que d et d' sont simultanément diagonalisables. Il s'en suit que

$d-d'$ est diagonalisable.

on a par ailleurs $d-d' = n' - n$

Montrons que n et n' annulent entre eux :

$$\begin{aligned} n \circ n' &= (u-d) \circ (u-d') \\ &= u \circ u - u \circ d' - d \circ u + d \circ d' \\ &= u \circ u - d' \circ u - u \circ d + d' \circ d \\ &= (u-d') \circ (u-d) \\ &= n' \circ n \end{aligned}$$

De là on déduit que $n'-n$ est nilpotent car

$$\begin{aligned} (n'-n)^m &= \sum_{j=0}^{m-m-j} \binom{m}{j} (n')^j n^{m-j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

si $m =$ indice de nilpotence de n'
+ indice de nilpotence de $n - 1$
 $= a + b - 1$

(En effet, si $j < b$, alors $a + b - 1 - j \geq a$
et donc $n^{m-j} = 0$).

lemme : Si $f: V \rightarrow V$ est diagonalisable
et nilpotent, alors $f=0$.

(5)

Démonstration: Si f est nul partout d'ordre de multiplicité k , alors le polynôme minimal de f est X^k . Mais f diagonalisable implique que le polynôme minimal est scindé à racines simples, donc $k=1$ et $f=0$. □

Comme $\underbrace{d-d'}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{n'-n}_{\text{nul part}} = 0$, on a

$$d-d' = n'-n = 0,$$

d'où l'unicité de la décomposition □

