

COURS 6 (27 février 2024)

① Multiplcité algébrique et géométrique
comme intèrè de diagonalisation

Proposition. Soit $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme.
Factori sons le polynôme caractéristique

$$P_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

← multipli-
cité
géométrique

↑ valeurs
propres

dans $\mathbb{C}$. Alors:

(1) $\dim V_{\lambda_i} \leq m_i$ pour tout i

(2) u est diagonalisable $\Leftrightarrow P_u$ st
scindé dans $\mathbb{K}$ et $\dim V_{\lambda_i} = m_i$.

Démonstration: Pour chaque $\lambda_i \in \mathbb{K}$, soit
 β_i une base de V_{λ_i} . Comme les espaces V_{λ_i}
sont en somme directe, on peut compléter
la famille $\beta_1 \cup \dots \cup \beta_r$ en une base β
de V . Dans cette base la matrice de u
est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{n_1}} & 0 & * \\ & \boxed{\lambda_2 I_{n_2}} & * \\ 0 & & \boxed{\lambda_s I_{n_s}} & * \\ & & & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

où B est une matrice carrée de taille $n = (n_1 + \dots + n_s)$. Comme A est triangulaire par blocs, on a

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \det(A - X I_n) \\ &= \underbrace{\det(B - X I_n)}_{P_B(X)} \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{n_i} \end{aligned}$$

on a donc: $\prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{n_i}$ divise $P_n(X)$,

ce qui implique

$$\dim V_{\lambda_i} = n_i \leq m_i$$

Démontrons (2) maintenant:

$\boxed{\Leftarrow}$ Si les valeurs propres sont dans $\mathbb{K}$ et $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, alors $\bigoplus_{i=1}^r V_{\lambda_i}$ est de dimension $\sum_{i=1}^r m_i = n$, donc égal à V tout entier, donc n est diagonalisable.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si n est diagonalisable, il existe une base β de V dans laquelle la matrice de n est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix}$$

et on a donc

$$\begin{aligned}
 P_n(X) &= \det(A - X I_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)^{n_i} \\
 &= (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{n_i},
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire tous les zéros sont dans $\mathbb{K}$
 et $\dim V_{\lambda_i} = m_i$ pour tout i □

② Triagonalisation

V espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n

$\mu: V \rightarrow V$ endomorphisme

Définition. on dit que μ est triagonalisable
 s'il existe une bse β de V dans laquelle la
 matrice de μ est triangulaire supérieure.

Si μ est triagonalisable, alors

$$P_n(X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coefficients diagonaux
 de la matrice dans une bse. Que $P_n(X)$
 soit scindé dans $\mathbb{K}$ est donc une condition
nécessaire pour la triagonalisation.

Théorème: Si $P_n(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$,
alors n est triqualisable.

(En termes de matrices: si le polynôme
caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{K})$ a toutes ses
racines dans $\mathbb{K}$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$
telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.)

Démonstration: Par récurrence sur $n = \dim(V)$.

$n=1$ évident

$n \geq 2$ et supposons le théorème démontré

pour $n-1$

Soit β une base de V , A la matrice de
 n dans β , $B = {}^tA$. On a:

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det({}^tA - X I_n) \\ &= \det({}^t(A - X I_n)) = P_A(X) \end{aligned}$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de $P_A(X)$. Alors
 $\lambda = \lambda_1$ est racine de $P_B(X)$, c'est-à-dire
valeur propre de B . Soit $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ une

vecteur propre, c'est-à-dire $T \neq 0$ et

$$BT = {}^tA \cdot T = \lambda T$$

On a alors :

$$\lambda(t_1 \dots t_n) = (t_1 \dots t_n) A$$

on prend la transposée de cette égalité.

Sont $H \subset V$ le sous-espace des vecteurs
 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que $(t_1 \dots t_n) X = 0$
 $(\Leftrightarrow t_1 x_1 + \dots + t_n x_n = 0)$

On a $\dim H = n-1$ et, pour $X \in H$,

$$(t_1 \dots t_n) A X = \lambda(t_1 \dots t_n) X = 0,$$

c'est-à-dire $AX \in H$. Comme A est la
matrice de u , H est stable par u .

Sont β_H une base de H et $\tilde{\beta} = \beta_H \cup \{u\}$
une base de V . La matrice de u dans $\tilde{\beta}$ est
de la forme

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A' & \gamma \\ \hline 0 & \mu \end{array} \right) \begin{matrix} \uparrow \\ n-1 \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1}$

On a donc : $P_u(X) = P_{A'}(X)(\mu - X)$.

$\Rightarrow \mu$ est une des racines λ_i et $P_{A'}(X)$
est le produit $\prod_{j \neq i} (\lambda_j - X)$.

En particulier, $P_A(X)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$,
 Par conséquent, il existe une base de H dans
 laquelle la matrice de $u|_H$ est triangulaire
 supérieure, donc u a matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & & * \\ & a_{22} & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & a_{n-1,n-1} & * \\ & & & & \mu \end{pmatrix}$$

□

Conclusion: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soient
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique
 de A . Alors:

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

Démonstration: D'après le théorème, il existe
 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire
 de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors:

$$P_A(X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$$

et donc $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\text{Tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

□

③ Le théorème de Cayley - Hamilton

Soit $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d \in K[X]$
un polynôme à coefficients dans K .

Définition. Si $u: V \rightarrow V$ est un endomorphisme, on appelle $Q(u)$ l'endomorphisme

$$Q(u) = a_0 \text{Id}_V + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_d u^d$$

où $u^i = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{i \text{ fois}}$. De même, si $A \in M_n(K)$ est une matrice, on appelle $Q(A)$ la matrice

$$Q(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_d A^d$$

Remarque: Cette opération satisfait à

$$\begin{aligned} Q(u) \circ R(u) &= (QR)(u) \\ &= (RQ)(u) \\ &= R(u) \circ Q(u) \end{aligned}$$

« les polynômes en u commutent entre eux ».

Théorème de Cayley - Hamilton: Soit $K \subset \mathbb{C}$
un sous-corps de $\mathbb{C}$ (e.g. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit V un K -espace vectoriel et soit u un endomorphisme de V de polynôme caractéristique $P_u(X)$. Alors $P_u(u) = 0$.

« u est annihilé par son polynôme caractéristique »

Démonstration : Il suffit de traiter le cas $K = \mathbb{C}$, en conservant la notation associée.

Soit $P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines dans $\mathbb{C}$. Il existe une bse $\beta = (f_1, \dots, f_n)$ de V dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Soit $F_i = \text{Vect}(f_1, \dots, f_i)$, pour $i \geq 1$ et $F_0 = \{0\}$. On a alors :

$$(u - \lambda_i \text{Id}_V)(F_i) \subseteq F_{i-1}$$

puis que la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \lambda_2 & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

représente

$$\begin{aligned} u(f_1) &= \lambda_1 f_1 \\ u(f_2) &= * f_1 + \lambda_2 f_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

(5)

Comme $F_n = V$, on a

$$(\mu - \lambda_n \text{Id}_V)(V) \subseteq F_{n-1},$$

puis $(\mu - \lambda_{n-1} \text{Id}_V)(\mu - \lambda_n \text{Id}_V)(V) \subseteq F_{n-2}$,

et ainsi de suite jusqu'à

$$\underbrace{(\mu - \lambda_1 \text{Id}_V) \dots (\mu - \lambda_n \text{Id}_V)}_{(-1)^n P_n(\mu)}(V) = \underbrace{\{0\}}_{F_0}$$

d'où $P_n(\mu) = 0$.

□

