

COURS 5 (13 février 2024)

Valeurs propres et vecteurs propres. Critères de diagonalisabilité simple: polynôme caractéristique scindé à racines simples, somme des espaces caractéristiques égale à la dimension de l'espace. Multiplicité algébrique et géométrique.

① Valeurs propres et vecteurs propres

Soient V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme.

Définition. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur non nul $v \in V \setminus \{0\}$ tel que

$$u(v) = \lambda \cdot v$$

Cela équivaut à dire

$$v \in \text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{Id})$$

On appelle $V_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ l'espace propre associé à λ , et tout vecteur non nul $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .

Proposition:

polynôme
caractéristique

λ est une valeur propre
de u

$$\Leftrightarrow P_u(\lambda) = 0$$

c'est-à-dire les valeurs propres de u sont
exactement les racines du polynôme caractéristique

Preuve: Soit A la matrice de u dans
une base β de V . Alors

λ valeur propre $\Leftrightarrow$ Il existe $v \in V, v \neq 0$
tel que $Av = \lambda v$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda \text{Id}) \underbrace{v}_{\text{non nul}} = 0$$

$\Leftrightarrow$ la matrice
 $A - \lambda \text{Id}$
n'est pas inversible

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda \text{Id}) = 0$$

Comme $\det(A - \lambda \text{Id})$ est le résultat d'évaluation
en $X = \lambda$ le polynôme caractéristique

$$P_u(X) = \det(A - X \cdot \text{Id}),$$

on déduit l'équivalence avec $P_u(\lambda) = 0$

□

(2)

② Espaces propres associés à des valeurs propres distinctes

Rappel: $E_1, \dots, E_r \subset V$ sous-espaces vectoriels

on dit que $E_1, \dots, E_r$ sont en somme directe si l'égalité

$$X_1 + \dots + X_r = 0$$

avec $X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_r \in E_r$, entraîne

$$X_1 = \dots = X_r = 0$$

Dans ce cas, on écrit $E_1 \oplus \dots \oplus E_r \subset V$ pour le sous-espace formé des combinaisons linéaires d'éléments des E_i .

Théorème: Soient V un espace vectoriel sur K et v un endomorphisme de V . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes. Alors les espaces propres $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$ sont en somme directe:

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} \subset V$$

↳ en général ce n'est pas une égalité!

Preuve: Par récurrence sur le nombre n de valeurs prop. Pour $n=1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \quad \text{avec } x_i \in V_{\lambda_i}$$

En appliquant l'endomorphisme u :

$$u(x_1) + \dots + u(x_n) = 0$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

En multipliant par λ_n :

$$\lambda_n x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0,$$

$$\text{d'où } \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_n) x_1}_{\in V_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1}}_{\in V_{\lambda_{n-1}}} = 0$$

Par récurrence:

$$(\lambda_1 - \lambda_n) x_1 = \dots = (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1} = 0$$

et comme les λ_i sont différents,

$$x_1 = \dots = x_{n-1} = 0,$$

et donc $x_n = 0$ aussi

□

③ Endomorphismes diagonalisables

Définition: on dit que l'endomorphisme $u: V \rightarrow V$ est diagonalisable si

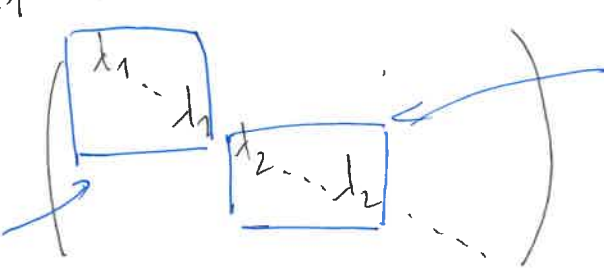
$$V = \bigoplus_{\substack{\lambda \text{ valeur} \\ \text{propre de } u}} V_\lambda$$

c'est-à-dire si V admet une bse formée de valeurs propres de u .

Explication: Si u est diagonalisable, la matrice de u dans la bse

$$\beta = \left\{ \begin{array}{c} \text{base de } V_{\lambda_1} \\ \vdots \\ \text{base de } V_{\lambda_2} \end{array} \right\}$$

est égale à



taille $\dim V_{\lambda_1}$

taille $\dim V_{\lambda_2}$

c'est-à-dire diagonale.

Réciproquement, si la matrice de u dans une bse $\{e_1, \dots, e_n\}$ est diagonale, alors u est diagonalisable.

Exemples: 1) Soit $u: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$

$$\begin{array}{l} e_1 \mapsto e_2 \\ e_2 \mapsto e_1 \end{array}$$

L'endomorphisme représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est

$$p_u(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{pmatrix} = X^2 - 1 \\ = (X-1)(X+1)$$

Valeurs props : $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$

Vecteurs props :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=1} = \mathbb{K}(e_1 + e_2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=-1} = \mathbb{K}(e_1 - e_2)$$

$\therefore u$ est diagonalisable

2) Soit $u: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ l'endomorphisme
 $e_1 \mapsto -e_2$
 $e_2 \mapsto e_1$

de nature $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique

$$P_n(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix} = X^2 + 1$$

* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $P_n(X)$ n'a pas de racines, donc n n'a pas de valeurs propres
 $\Rightarrow n$ n'est pas diagonalisable

(En effet, on voit que les équations

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ -x = \lambda y \end{cases}$$

donnent $y = -\lambda^2 y$, c'est-à-dire $y = 0$,
 puis $x = 0$)

* Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $P_n(X) = (X + i)(X - i)$, donc n a valeurs propres $\lambda = i$ et $\lambda = -i$, de vecteurs propres $e_1 + i e_2$ et $e_1 - i e_2$.

3) Soit $n : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ l'endomorphisme
 $e_1 \mapsto e_1$
 $e_2 \mapsto e_1 + e_2$

de nature $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique

$$P_n(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$$

a une racine double $\lambda = 1$. L'espace propre associé est

$$V_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+x = x \\ y=y \end{cases}$$

$$= \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathbb{K}^2 \neq V_{\lambda=1}$, n n'est pas diagonalisable.

④ Critères simples de diagonalisation

Proposition: Si $n: V \rightarrow V$ a n ($= \dim V$) valeurs propres distinctes, alors n est diagonalisable.

Preuve: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres.

Alors $V \supset V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$, mais

$$\dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}) = \sum_{i=1}^n \dim V_{\lambda_i} \geq n$$

et donc forcément $\boxed{V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}}$ □

Corollaire: Si $P_n(X)$ est réduite à zéro simple, alors n est diagonalisable.

La valeur propre n'est pas nulle. Par exemple,
 $n: V \rightarrow V$ est diagonalisable, mais il n'y a
 $X \mapsto X$
 qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$.

Définition: Soit $n: V \rightarrow V$ un endomorphisme.
 Soit λ une valeur propre de n . On appelle:

* multiplicité algébrique de λ la
 multiplicité de λ comme racine de $P_n(X)$

* multiplicité géométrique de λ la
 dimension de l'espace propre V_λ

Explication sur la multiplicité algébrique:

Si $A, B \in K[X]$ sont des polynômes,
 avec $B \neq 0$, on peut faire la division
 euclidienne de A par B :

$$A = B \cdot Q + R \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{reste} \\ \deg R < \deg B \end{array}$$

Un élément $\lambda \in K$ est racine de $P_n(X)$

si et seulement si $X - \lambda$ divise $P_n(X)$. En effet, par division euclidienne:

$$P_n(X) = (X - \lambda) Q(X) + \underbrace{R(X)}_{\deg < 1}$$

c'est-à-dire
polynôme constant

Mais en faisant $X = \lambda$, on trouve $R = 0$,

$$\text{donc } P_n(X) = (X - \lambda) Q(X).$$

La multiplicité algébrique de λ est le plus grand entier m tel que $(X - \lambda)^m$ divise $P_n(X)$.