

COURS 4 (6 février 2024)

Démonstration de la formule du développement du déterminant par rapport à une ligne et de l'invariance par les opérations élémentaires sur les lignes. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

① DÉMONSTRATION DU DEVELOPPEMENT PAR RAPPORT À UNE LIGNE

Rappelons la formule:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

↑  
matrice  
sans la ligne i  
et la colonne j

Preuve: Par définition,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) \prod_{l \neq i} a_{l\sigma(l)}}_{\text{But: } = (-1)^{i+j} \det A_{ij}} \end{aligned}$$

Considérons les permutations  $\lambda, \rho \in S_n$  définies de la façon suivante:

$$\lambda(k) = \begin{cases} k & 1 \leq k < i \\ k+1 & i \leq k < n \\ i & k = n \end{cases} \quad \rho(k) = \begin{cases} k & 1 \leq k < j \\ k+1 & j \leq k < n \\ j & k = n \end{cases}$$

Ainsi on peut résumer la matrice  $A_{ij}$  comme

$$A_{ij} = (a_{\lambda(a), \rho(b)})_{1 \leq a, b \leq n-1}$$

d'où la formule

$$(*) \quad \det A_{ij} = \sum_{z \in S_{n-1}} \varepsilon(z) \prod_{k=1}^{n-1} a_{\lambda(k), \rho(z(k))}$$

on peut étudier une permutation  $z \in S_{n-1}$  et une permutation  $z^+ \in S_n$  en posant  $z^+(n) = n$ , et on a alors  $\varepsilon(z^+) = \varepsilon(z)$ .

Prenons  $\ell = \lambda(k)$ . Comme  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$\ell$  ne peut pas la valeur  $\lambda(n) = i$ .

Soit  $\sigma = \rho \circ z^+ \circ \lambda^{-1}$ . Alors:

$$\begin{aligned} \sigma(\ell) &= (\rho \circ z^+ \circ \lambda^{-1})(\lambda(k)) \\ &= \rho(z^+(k)) \\ &= \rho(z(k)) \end{aligned}$$

et  $\boxed{\sigma(i) = \rho(n) = j}$ .

(2)

Réciproquement, pour tout  $\sigma \in S_n$  avec  $\sigma(i) = j$ ,  
la permutation  $j^{-1} \circ \sigma \circ \lambda$  satisfait à

$$(j^{-1} \circ \sigma \circ \lambda)(n) = j^{-1}(\sigma(i)) = j^{-1}(j) = n,$$

donc elle est de la forme  $z^+$  pour  $z \in S_{n-1}$ .

on peut donc écrire (\*) sous la forme :

$$\begin{aligned} \det A_{ij} &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) = j}} \varepsilon(\lambda) \varepsilon(j) \varepsilon(\sigma) \prod_{l \neq i} a_{l, \sigma(l)} \\ &= \varepsilon(\lambda) \varepsilon(j) \prod_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) = j}} \varepsilon(\sigma) \prod_{l \neq i} a_{l, \sigma(l)} \end{aligned}$$

Tout ce qu'il reste à démontrer est :

$$\varepsilon(\lambda) \varepsilon(j) = (-1)^{i+j}$$

Pour cela on compte le nombre d'inversions :

$$\{a < b \mid \lambda(a) > \lambda(b)\}.$$

est l'ensemble des  $(i, b)$  avec  $b = i+1, \dots, n$

$$\Rightarrow \varepsilon(\lambda) = (-1)^{n-i}$$

et de même  $\varepsilon(j) = (-1)^{n-j}$ , d'où

$$\varepsilon(i) \varepsilon(j) = (-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j},$$

ce qui conclut la démonstration □

## ② OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES ET LES COLONNES

Proposition. Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Si  $B$  est obtenue à partir de  $A$  par une opération  $L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j$ , alors  $\det B = \det A$ .

Démonstration. on démontre d'abord

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

simplement en développant par rapport à la

(3)

ligne  $i$  le déterminant. on a alors:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{\lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}$$

$= 0$  car il y a  
deux fois la même  
ligne  $\square$

### ③ POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES

Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $\mu: V \rightarrow V$  un endomorphisme.  
Soit  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ . Soit  $A$  la matrice de  $\mu$  par rapport à la base  $\beta$ .

Lemme:  $\det(A) \in \mathbb{K}$

$$\det(A - X I_n) \in \mathbb{K}[X]$$

dépend uniquement de l'endomorphisme  $u$  et pas du choix de la base  $B$ .

Démonstration: Si  $B'$  est une autre base, alors la matrice de  $u$  dans  $B$  est de la forme  $A' = P^{-1} A P$  pour  $P$  la matrice (invertible) de passage. Donc:

$$\det(A') = \det(P^{-1} A P) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A)$$

car  $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$ . De même:

$$\det(A' - X I_n) = \det(P^{-1}) \det(A - X I_n) \det(P)$$

identité  
de matrices  
à coefficients  
dans  $\mathbb{K}[X]$

$$= P^{-1} A P - P^{-1} X I_n P = \det(A - X I_n)$$
$$= P^{-1} (A - X I_n) P$$

□

Définition. On appelle  $\det(A)$  le déterminant de  $u$  et  $\det(A - X I_n)$  le polynôme caractéristique de  $u$ . On le note  $P_u(X)$ .

Théorème:  $P_n(X)$  est un polynôme de degré  $n$ ,  
de la forme

$$P_n(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(u) X^{n-1} + \dots + \det(u)$$

où  $\text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ , somme des coefficients  
diagonaux de la matrice de l'endomorphisme.

Preuve: par définition:

$$P_n(X) = \det(A - X I_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

où  $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq j \\ a_{ii} - X & i = j \end{cases}$  . chaque facteur

dans le produit est de degré  $\leq 1$ , donc  $P_n(X)$   
est un polynôme de degré  $\leq n$ . Pour  $\sigma = \text{Id}$ ,  
on trouve le terme

$$\begin{aligned} b_{11} \dots b_{nn} &= (a_{11} - X) \dots (a_{nn} - X) \\ &= (-1)^n X^n + \dots \end{aligned}$$

Pour avoir un terme en degré  $n-1$ , il faut

choisir  $n-1$  termes sur la diagonale, mais cela détermine également le dernier, sur la diagonale aussi, qui doit être égal à  $a_{ii}$ :

$$b_{11} \dots b_{nn}$$

$$= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} X^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{Trace } T_2(n)} + \dots$$

Enfin, le terme constant de  $P_n(X)$  est sa valeur en  $X=0$ , c'est-à-dire  $\det(A)$ . □