

COURS 3 (30 janvier 2024)

Démonstration du théorème. Le déterminant d'une matrice est multiplicatif. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Calcul du déterminant d'une matrice diagonale et triangulaire. Développement par rapport à une ligne / colonne.

① DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Rappelons l'énoncé:

V espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base

$B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base dual

Alors les applications p -linéaires alternées

$$(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*)(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(\sigma(x_1)) \dots e_{i_p}^*(\sigma(x_p))$$

pour $i_1 < \dots < i_p$ dans $\{1, \dots, n\}$ forment une

base de l'espace $A_p(V, \mathbb{K})$. En particulier:

$$\dim_{\mathbb{K}} A_p(V, \mathbb{K}) = \binom{n}{p} \text{ pour } p=1, \dots, n$$

Pour $p > n$, $A_p(V, \mathbb{K}) = \{0\}$.

↑ applications p -linéaires alternées $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$

Démonstration: Une base de l'espace

$\mathcal{L}_p(V, \mathbb{K})$ des applications p -linéaires $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$
est donnée par $\varphi_{j_1, \dots, j_p}$ avec $(j_1, \dots, j_p) \in \{1, \dots, n\}^p$
définies comme

$$\varphi_{j_1, \dots, j_p}(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

En effet, une application $f \in \mathcal{L}_p(V, \mathbb{K})$
satisfait à

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_p) &= f(x_{11}e_1 + \dots + x_{1n}e_n, \dots, x_{p1}e_1 + \dots + x_{pn}e_n) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p} x_{1i_1} \dots x_{pi_p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

et est donc uniquement déterminée par

$$(f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}))_{i_1, \dots, i_p}$$

Comme $A_p(V, \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}_p(V, \mathbb{K})$, tout élément
s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{(j_1, \dots, j_p)} c_{(j_1, \dots, j_p)} \underbrace{\varphi_{j_1, \dots, j_p}}_{e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_p}^*}$$

avec des coefficients donnés par :

$$C^f_{(j_1, \dots, j_p)} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \quad (*)$$

Comme f est alternée, $C^f_{(j_1, \dots, j_p)} = 0$ si $\hookrightarrow$

$j_1, \dots, j_p$ ne sont pas tous distincts.

De plus, si $j_1 < \dots < j_p$ et $\sigma \in S_p$,

$$C^f_{(j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(p)})} = \varepsilon(\sigma) C^f_{(j_1, \dots, j_p)}$$

$$(*) \Rightarrow A_p(V, K) = 0 \text{ si } p > n$$

pour $p = 0, \dots, n$

$$f = \sum_{j_1 < \dots < j_p} C^f_{(j_1, \dots, j_p)} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) e^*_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e^*_{j_{\sigma(p)}}$$

$$= \sum_{j_1 < \dots < j_p} C^f_{(j_1, \dots, j_p)} e^*_1 \wedge \dots \wedge e^*_{j_p}$$

C'est donc une base génératrice.

Les éléments $e^*_1 \wedge \dots \wedge e^*_{j_p}$ sont linéairement indépendants car

$$(e^*_{j_1} \wedge \dots \wedge e^*_{j_p})(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \begin{cases} 1 & i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient donc une bse de $A_p(V, \mathbb{K})$. $\square$

② MULTIPLICATIVE DU DÉTERMINANT

Rappelons que la forme n -linéaire alternée

$$e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \in \underbrace{\mathcal{L}_n(V, \mathbb{K})}_{\text{espace de dimension 1}}$$

satisfait à

$$(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{matrice de } (x_1, \dots, x_n) \text{ dans la bse } \beta}$

Soit $u: V \rightarrow V$ une application linéaire.

Alors, comme $\mathcal{L}_n(V, \mathbb{K})$ est de dimension 1,

$$\begin{aligned} (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(u(x_1), \dots, u(x_n)) \\ = \lambda (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in V$.

Définition: on appelle déterminant de u le scalaire λ on le note $\det(u)$.

Si $u, u': V \rightarrow K$ sont des applications linéaires,

$$\begin{aligned} & (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*) ((u \circ u')(x_1), \dots, (u \circ u')(x_n)) \\ &= \det(u) (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*) (u'(x_1), \dots, u'(x_n)) \\ &= \det(u) \det(u') (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*) (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

et on obtient donc

$$\det(u \circ u') = \det(u) \det(u')$$

Proposition: Soient $A, B \in M_n(K)$ des matrices de taille n . Alors

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Preuve: Soient u_A et u_B les applications linéaires $V \rightarrow V$ données par les matrices A et B dans la base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$. Alors

$$\det(u_A) = \det A$$

$$\det(u_B) = \det B$$

Par ailleurs, $u_A \circ u_B = u_{AB}$, d'où

$$\det(AB) = \det(u_A \circ u_B) = \det A \cdot \det B \quad \square$$

Conséquence: Si une matrice $A \in M_n(K)$ est inversible, alors $\det A \neq 0$.

En effet, si A est inversible, alors il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A \cdot B = I_n \quad \leftarrow \text{matrice identité}$$

on a alors

$$\det(A) \cdot \det(B) = \det(I_n) = \underline{1},$$

ce qui implique $\det(A) \neq 0$.

On verra plus tard que c'est aussi une condition suffisante: si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.

③ DETERMINANT D'UNE MATRICE TRIANGULAIRE

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} & * \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

une matrice triangulaire supérieure. Alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

(9)

$$= a_{11} a_{22} \dots a_{nn} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq Id}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Si $\sigma \neq Id$, il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(i) < i$. Alors $a_{i\sigma(i)}$ est sous la diagonale et vaut donc 0

$$\Rightarrow \boxed{\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}}$$

Cas particulier: matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$

le même résultat est vrai pour les matrices triangulaires inférieures et pour les matrices triangulaires par blocs

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * & * & * \\ 0 & \boxed{A_2} & * & * \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \boxed{A_2} \end{pmatrix} = \det A_1 \dots \det A_2$$

(9) MATRICE DES COFACTEURS

Définition: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de taille n . Pour chaque $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note A_{ij} la matrice de taille $n-1$ obtenue à partir de A en effaçant la ligne i et la colonne j :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

j

i

La matrice des cofacteurs est la matrice (ou simplement comatrice) est la matrice

$$\text{Com } A = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} & - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\ - \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} & + \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\ + \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & - \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition (Développement par rapport à une ligne) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

De même, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

(développement par rapport à une colonne).

Théorème (Règle de Cramer)

Supposons $\det A$ non nul. Alors la matrice A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com } A$$

on peut
diviser car
non nul

matrice
transposée

preuve: Voyons que ${}^t \text{com } A \cdot A = \underline{A \cdot {}^t \text{com } A}$
 est la matrice $\det A \cdot I_n$. Le coefficient
 sur la ligne i et la colonne j est égal à

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k+j} \det \underbrace{A_{jk}}_{\substack{\uparrow \text{transposée}}}$$

Si $i=j$, c'est le déterminant par la
 propriété. Si $i \neq j$, à nouveau par la
 propriété, c'est le déterminant d'une matrice
 au signe près

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ligne } j \\ \leftarrow \text{ligne } i \end{matrix}$$

où deux lignes sont répétées, et un tel
 déterminant vaut 0 car il est égal à

$$(\underbrace{e_1^* \ 1 \ \cdots \ 1 \ e_n^*}_{\substack{\text{application} \\ \text{alternée}}}) (\underbrace{\cdots, x, \cdots, x, \cdots}_{\substack{\uparrow \text{vecteurs} \\ \uparrow \text{répétés}}}) = 0$$

□