

COURS 2

(23 janvier 2024)

- Déterminant d'une matrice $n \times n$: cohérence avec le cas 2×2 et 3×3
- Applications multilinéaires alternées :
Définition et exemple du déterminant
- Déterminant par rapport à une base fixée
- L'espace vectoriel des n -formes alternées est de dimension 1
- Le déterminant d'une matrice est multiplicatif

① DÉTERMINANT D'UNE MATRICE $N \times N$ Soit n un entier ≥ 1 . Posons $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.Définition. le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

colonne
↑
ligne

à coefficients dans K est

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$\sigma \in S_n$
 permutation
 en n éléments

signature de la
 permutation

Observons que cette définition redonne les formules usuelles pour $n=2$ et $n=3$

$n=2$

σ	Id	(1 2)
$\varepsilon(\sigma)$	1	-1

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$n=3$

σ	Id	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
$\varepsilon(\sigma)$	1	1	1	-1	-1	-1

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} //$$

② Applications multilinéaires

Sont V et W des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit p un entier ≥ 1 . Une application p -linéaire

est une application

$$f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ fois}} \longrightarrow W$$

telle que, pour tous $v_1, \dots, v_{p-1}$ et tout $i=1, \dots, p$,
l'application

$$V \longrightarrow W$$

$$X \longmapsto f(v_1, \dots, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{position} \\ i}}{X}, \dots, v_{p-1})$$

est linéaire. Donc, une application 1-linéaire est simplement une application linéaire. En général, on les appelle multilinéaires.

Définition: Soit $f: V^p \rightarrow W$ une application p -linéaire. On dit que f est:

- * alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ quand deux vecteurs parmi les x_i sont égaux
- * antisymétrique si, pour tout $\sigma \in S_p$,

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$
- * symétrique si, pour tout $\sigma \in S_p$,

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p)$$

Proposition: si f est alternée, alors f est antisymétrique.

Démonstration: Soit f une application p -linéaire alternée. Pour $x_1, \dots, x_p \in V$, fixons $i < j$ et définissons $g: V \times V \rightarrow W$ par

$$g(x, y) = f(x_1, \dots, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{position} \\ i}}{x_{i-1}, x}, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{position} \\ j}}{x_{i+1}, \dots, y}, \dots)$$

Alors:

$$\begin{aligned} 0 &= g(x_i + x_j, x_i + x_j) \\ &\overset{\text{alternée}}{=} g(\cancel{x_i}, x_i) + g(x_i, \cancel{x_j}) + g(x_j, x_i) + g(\cancel{x_j}, x_j) \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \\ = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \end{aligned}$$

ce qui montre que la condition

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$

est vraie pour σ une transposition. Comme tout σ s'écrit $\sigma = z_1 \dots z_r$ avec z_i transposition et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$, on voit que f est $\square$

(3)

Remarque: En fait, puisque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les deux propriétés sont équivalentes. En effet, soit f anti-symétrique. Alors:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Si il existe $i < j$ tels que $x_i = x_j$, on a aussi

$$= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p)$$

donc $\textcircled{2} f(x_1, \dots, x_p) = 0$

$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_p) = 0$, c'est-à-dire
 f est alternée

③ FORMES LINÉAIRES ALTERNÉES

Une forme p-linéaire est une application p-linéaire $f: V^p \rightarrow K$.

Voici l'exemple principal. Soient

$$f_1, \dots, f_p: V \rightarrow K$$

des formes linéaires sur V . Alors

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_p)(x_1, \dots, x_p) = \underbrace{f_1(x_1)}_{\in K} \dots \underbrace{f_p(x_p)}_{\in K}$$

est une forme p-linéaire.

Proposition. L'application

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_p)(x_1, \dots, x_p)$$

$$\stackrel{\text{d\u00e9finition}}{=} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) (f_1 \otimes \dots \otimes f_p)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f_1(x_{\sigma(1)}) \dots f_p(x_{\sigma(p)})$$

est une forme p -lin\u00e9aire altern\u00e9e.

D\u00e9monstration. C'est une combinaison lin\u00e9aire de formes p -lin\u00e9aires, donc p -lin\u00e9aire.

Altern\u00e9e: le but est de montrer

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_p)(x_1, \dots, x_p) = 0$$

si $x_1, \dots, x_p$ ne sont pas tous distincts. Soient $i < j$ tels que $x_i = x_j$ et soit z la transposition qui les \u00e9change. Alors, posant

$$A_n = \{ \sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1 \}$$

on a $S_n = A_n \sqcup \underbrace{z A_n}_{\{z\sigma \mid \sigma \in A_n\}}$. En effet, si

$\sigma \notin A_n$, alors $\varepsilon(z\sigma) = \varepsilon(z)\varepsilon(\sigma) = (-1) \times (-1) = 1$,

donc $z\sigma \in A_n$, donc $\underbrace{zz\sigma}_{\text{Id}} \in z A_n$.

(4)

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_p)(x_1, \dots, x_p)$$

$$(*) = \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma) \left[f_1(x_{\sigma(1)}) \cdots f_p(x_{\sigma(p)}) + \varepsilon(-1) f_1(x_{\sigma(1)}) \cdots f_p(x_{\sigma(p)}) \right]$$

Soit $\sigma \in A_n$. On a $\boxed{x_{\sigma(k)} = x_{\sigma(k)}}$ pour

tout $k \in \{1, \dots, p\}$. En effet, c'est vrai si

$\sigma(k) \neq i, j$. Si $\sigma(k) = i$, alors

$$x_{\sigma(k)} = x_{\sigma(i)} = x_j = x_i = x_{\sigma(k)}$$

et de même si $\sigma(k) = j$. Donc le terme à l'intérieur du crochet dans $(*)$ est nul $\square$

Exemple le plus important pour nous:

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et
soit $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale, c'est-à-dire
dire $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{K}$ est la forme linéaire
qui vaut 1 sur e_i et 0 sur les autres e_j .

Alors $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ est une forme

p -linéaire alternée pour tous

$i_1, \dots, i_p$ dans $\{1, \dots, n\}$.

En particulier,

$$e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

est une forme n -linéaire alternée. Voyons ce qu'elle fait sur des vecteurs

$$x_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \dots + a_{1n} e_n$$

$$x_n = a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \dots + a_{nn} e_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nature de $(x_1, \dots, x_n)$
dans la base $(e_1, \dots, e_n)$

et on a :

$$(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(x_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

car $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$
 est une bijection
 et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$

Conclusion:

$$(e_1^* \dots e_n^*)(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque: En passant, nous avons démontré
 que $\boxed{\det(A) = \det({}^t A)}$ pour une
 matrice A . En effet,

$$\det({}^t A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} = \det(A)$$

Théorème: Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Soit $A_p(V, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes p -linéaires alternées. Alors:

$$\dim A_p(V, \mathbb{K}) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Pour tout $p = 1, \dots, n$, une base est donnée par les formes $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ pour $i_1 < \dots < i_p$.

Si $p > n$, on a $A_p(V, \mathbb{K}) = 0$.

(En particulier, $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ est une base de l'espace de dimension 1 des formes n -linéaires)