

EXPONENTIELLES DE MATRICES

① Convergence dans un espace vectoriel

on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la valeur absolue $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ si $x = a + ib$.

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une norme sur E est une application

$$\|\cdot\|: E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$x \longmapsto \|x\|$$

satisfaisant à:

$$(1) \|x\| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0$$

$$(2) \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{K}$$

$$(3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ pour tous } x, y \in E$$

On dit aussi que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Exemples: On utilisera surtout les deux exemples suivants:

* $\mathbb{K}^n$ muni de la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

* L'espace vectoriel des matrices $M_n(\mathbb{K})$
muni de la norme matricielle

$$\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|_\infty = 1}} \|Ax\|_\infty$$

Une propriété importante de cette norme est
la suivante: soit $x \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}$, alors
 $x' = \frac{1}{\|x\|_\infty} x$ est de norme $\|x'\|_\infty = 1$ et
 $x = \|x\|_\infty x'$. On a donc:

$$\|Ax\|_\infty = \|x\|_\infty \|Ax'\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|x\|_\infty$$

(inégalité qui reste vraie pour $x=0$ aussi)
On en déduit

$$\|ABx\|_\infty \leq \|A\| \|Bx\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|B\| \|x\|_\infty,$$

donc $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ En particulier,

$\|A^n\| \leq \|A\|^n$ et la norme de $A^0 = Id$
est égale à 1.

(2)

Définition: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -espace vectoriel normé. on dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans E est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon \quad \text{pour tous } m, n \geq n_0$$

on dit que $(u_n)_n$ converge vers $l \in E$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - l\| = 0$.

Théorème: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -espace vectoriel normé de dimension finie. Alors E est complet, c'est-à-dire toute suite de Cauchy dans E est convergente.

② Exponentielle d'une matrice

Soit $A \in M_d(K)$. on considère la suite de matrices

$$S_n = I_d + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^n}{n!}$$

Proposition: la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge.

Démonstration: Comme l'espace vectoriel des matrices $M_d(\mathbb{K})$, muni de la norme $\|\cdot\|$, est complet, il suffit de montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy. Calculons:

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{i=p+1}^q \frac{A^i}{i!} \right\|$$

$$\leq \sum_{i=p+1}^q \frac{\|A^i\|}{i!}$$

$$\leq \sum_{i=p+1}^q \frac{\|A\|^i}{i!}$$

La suite réelle $\sum_{i=0}^n \frac{\|A\|^i}{i!}$ étant convergente, elle est de Cauchy, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p_0 tel que $\|S_q - S_p\| < \varepsilon$ pour $q > p > p_0$. $\square$

Définition: on appelle exponentielle de A et on note

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \in M_d(\mathbb{K})$$

la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 0}$.

Exemple: Si A est nilpotente d'indice de nilpotence n , alors

$$\exp(A) = \text{Id} + A + \dots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}$$

est donnée par une somme finie.

③ Propriétés de l'exponentielle

Proposition: Soit $A \in M_d(\mathbb{K})$ une matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_d$.
Alors $\exp(A)$ est une matrice triangulaire de termes diagonaux $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_d)$.

Démonstration: Notons

$$\varphi_{i,j}: M_d(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$B \longmapsto b_{ij}$$

la forme linéaire qui à une matrice $B = (b_{ij})$ associe le coefficient b_{ij} . Alors:

$$|b_{ij}| \leq \|B e_j\|_\infty \leq \|B\|$$

↑ car $\|e_j\|_\infty = 1$

et cette inégalité implique que si $(B_n)_n$ converge vers B , alors

$$\varphi_{ij}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{ij}(B_n)$$

on applique ceci à la suite $B_n = \sum_{i=0}^n \frac{A^i}{i!}$

Chaque matrice $\frac{A^i}{i!}$ est triangulaire de termes diagonaux $\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_r^i}{i!}$ pour $r=1, \dots, d$,

d'où

$$\varphi_{ij}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{ij}(B_n) = \begin{cases} \exp(\lambda_i) & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

et $\exp(A)$ est triangulaire de termes diagonaux $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_d)$ □

Proposition: Soient $A \in M_d(\mathbb{K})$ et $P \in GL_d(\mathbb{K})$

$$\text{Alors: } \exp({}^t A) = {}^t \exp(A)$$

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A) P$$

Démonstrations: Comme les applications linéaires $A \mapsto {}^t A$ et $A \mapsto P^{-1}AP$ sont continues, on a

$$\begin{aligned} \exp({}^t A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{{}^t A^i}{i!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{({}^t A)^i}{i!} = \exp({}^t A) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \exp(P^{-1}AP) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{(P^{-1}AP)^n}{n!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n P^{-1} \frac{A^n}{n!} P \\
 &= P^{-1} \exp(A) P
 \end{aligned}$$

□

Corollaire : $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A))$

Démonstration : Comme $M_d(\mathbb{R}) \subset M_d(\mathbb{C})$, il suffit de traiter le cas $K = \mathbb{C}$. On peut alors triagonaliser A : il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure avec $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sur la diagonale. Alors :

$$\begin{aligned}
 \det(\exp(A)) &= \det(P^{-1} \exp(A) P) \\
 &= \det(\exp(P^{-1}AP)) \\
 &= \prod_{i=1}^d \exp(\lambda_i) \\
 &= \exp\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i\right) \\
 &= \exp(\text{Tr}(A))
 \end{aligned}$$

□

Proposition: Si A et B commutent ($AB=BA$),

alors $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$

En particulier, la matrice $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.

Démonstration: Comme A et B commutent, par la formule du binôme

$$\begin{aligned}(A+B)^n &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} A^p B^{n-p} \\ &= \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=n}} \frac{n!}{p! q!} A^p B^q\end{aligned}$$

On a alors:

$$\begin{aligned}\exp(A) \exp(B) &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=n}} \frac{A^p B^q}{p! q!} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(A+B)^n}{n!} \\ &= \exp(A+B)\end{aligned}$$

(5)
 Dans ce calcul, on a utilisé que, étant
 données deux séries absolument convergentes
 $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ et $\sum_{j=0}^{\infty} B_j$, leur produit est la
 série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n A_i B_{n-i} \right)$. □

Remarque: l'égalité est fautive en général.
 Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 ne commute pas. on a:

$$\exp(A) = I_2 + A \quad \text{car } A^2 = 0$$

$$\exp(B) = I_2 + B$$

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = I_2 + A + B + AB$$

$$\exp(B) \cdot \exp(A) = I_2 + A + B + BA$$

et comme ces deux produits sont différents,
 ils peuvent pas être égaux à $\exp(A+B)$.

Proposition: Pour tout bloc de Jordan $J_d(\lambda)$,

$$\exp(J_d(\lambda)) = \exp(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \frac{\lambda^2}{2} & \dots & \frac{\lambda^{d-1}}{(d-1)!} \\ & 1 & \lambda & \dots & \frac{\lambda^{d-2}}{(d-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{J_d(\lambda) = \lambda I_d + J}$$

Pour toute matrice de Jordan, disons

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_{d_1}(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{d_n}(\lambda_n)} \end{pmatrix}$$

on a

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \boxed{\exp(J_{d_1}(\lambda_1))} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\exp(J_{d_n}(\lambda_n))} \end{pmatrix}$$

Démonstration: Soient $e_1, \dots, e_d$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$. Alors $J^i e_j = \begin{cases} 0 & j=1, \dots, i \\ e_{j-i} & j=i+1, \dots, d \end{cases}$,

donc $J^i e_j$ a tous les coefficients nuls sauf ceux de la i -ième diagonale au-dessus de la diagonale principale qui sont égaux à 1. Cela donne:

$$\exp(J_d(\lambda)) = \exp(\lambda I_d + J)$$

$$= \exp(\lambda) \exp(J)$$

$$= \exp(\lambda) \left(I_d + J + \frac{J^2}{2} + \dots + \frac{J^{d-1}}{(d-1)!} \right)$$

□