

Forme normale de Jordan d'un endomorphisme

Définition: Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

* On appelle bloc de Jordan de taille n associé à λ la matrice

$$\begin{aligned} J_n(\lambda) &= \lambda I_n + J_n \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ 0 & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

* Pour une partition f de n , on pose

$$\begin{aligned} J_f(\lambda) &= \lambda I_n + J_f \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{J_{f_1}(\lambda)} & & \\ & \boxed{J_{f_2}(\lambda)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on dit que c'est une matrice de Jordan de taille n associée à λ .

* Finalement, étant donné $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$, $m_1, \dots, m_r \geq 1$ et des partitions f_i de m_i , on note $J_{f_1, \dots, f_r}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ la matrice de

taille $m_1 + \dots + m_2$, diagonale par blocs, de blocs diagonaux $J_{f_1}(\lambda_1), \dots, J_{f_2}(\lambda_2)$:

$$J_{f_1, \dots, f_2}(\lambda_1, \dots, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{f_1}(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{f_2}(\lambda_2)} \end{pmatrix}$$

Théorème. Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et $u: V \rightarrow V$ un endomorphisme. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_2$ les valeurs propres distinctes de u , $m_i = \dim V_{(\lambda_i)}$ la dimension des espaces caractéristiques, $M_i = u|_{V_{(\lambda_i)}}$ et f_i la partition de m_i associée à la suite des ordres de $M_i - \lambda_i \text{Id}$.

(1) Il existe une base β de V dans laquelle la matrice de u est

$$J_{f_1, \dots, f_2}(\lambda_1, \dots, \lambda_2)$$

où $f_i = \tilde{f}_i$.

(2) Les $(\lambda_1, f_1), \dots, (\lambda_2, f_2)$ sont uniquement déterminées à l'ordre près, c'est-à-dire s'il existe une base β' de V dans laquelle la

matrice de n est $J_{p_1', \dots, p_s'}(\mu_1, \dots, \mu_s)$ avec les μ_i distincts, alors $s=2$ et il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\mu_i = \lambda_{\sigma(i)}$ et $p_i' = p_{\sigma(i)}$.

On dit que $J_{p_1, \dots, p_r}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est la forme normale de Jordan de l'endomorphisme u .

Remarque: En termes matriciels, le contenu de l'énoncé est que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Jordan $J_{p_1, \dots, p_r}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Démonstration:

Existence: Pour $i=1, \dots, r$, posons

$$N_i = V(u_i) = \ker((u - \lambda_i \text{Id}_V)^{n_i})$$

et $u_i = u|_{N_i}$. Alors $u_i - \lambda_i \text{Id}_{N_i}$ est un endomorphisme nilpotent de N_i . D'après la forme normale des endomorphismes nilpotents, il existe une base β_i de N_i dans laquelle la matrice de $u_i - \lambda_i \text{Id}_{N_i}$ est J_{f_i} avec $f_i = \tilde{f}_i$; la matrice de u_i est donc

$$\lambda_i \text{Id}_{N_i} + J_{f_i} = J_{f_i}(\lambda_i).$$

Par ailleurs, l'espace V se décompose en

$$V = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$$

et $p_n(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$. Donc

$$\beta = \beta_1 \vee \dots \vee \beta_r$$

soit une base de V dans laquelle la matrice de n est de la forme $J_{\beta_1, \dots, \beta_r}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Unité : Supposons qu'il reste une base β' dans laquelle la matrice de n est

$$J_{\beta'_1, \dots, \beta'_s}(\mu_1, \dots, \mu_s)$$

avec toutes les μ_i distinctes. Alors

$$p_n(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^s (X - \mu_i)^{d_i}$$

avec $d_i = \text{somme des parts de } \beta'_i$. En comparant avec l'expression précédente pour $p_n(X)$, on

trouve : $s = r$, $\mu_i = \lambda_{\sigma(i)}$ pour une permutation σ de $\{1, \dots, r\}$. Il reste à

déterminer $\beta'_i = \beta_{\sigma(i)}$, c'est-à-dire $\boxed{\beta'_i = \beta_i}$ après à rénumérer les indices.

Soient β'_i l'ensemble de vecteurs de la base β'
 qui correspondent à $J_{\lambda'_i}(\lambda_i)$. C'est la base d'un
 sous-espace $W_i \subset V$ de dimension m_i stable
 par u avec $\text{Mat}_{\beta'_i}(u|_{W_i}) = J_{\lambda'_i}(\lambda_i)$. On a
 alors $(u|_{W_i} - \lambda_i \text{Id}_{W_i})^{m_i} = 0$ car $J_{\lambda'_i}$ est
 triangulaire supérieure stricte de taille m_i .
 Donc $W_i \subset \text{Ker}((u - \lambda_i \text{Id})^{m_i}) = V_{(\lambda_i)} = N_i$,
 et comme ils ont même dimension $\boxed{W_i = N_i}$.

On en déduit que β_i et β'_i sont deux
 bases du même espace N_i dans lesquelles les
 matrices de l'endomorphisme valent $u|_{N_i} - \lambda_i \text{Id}_{N_i}$
 sont J_{λ_i} et $J_{\lambda'_i}$. Par l'unicité de la
 forme nulle de Jordan d'un endomorphisme
 nilpotent, $\lambda_i = \lambda'_i$. □

Corollaire: Soient $A, A' \in M_n(\mathbb{C})$. Les conditions
 suivantes sont équivalentes:

- (1) A et A' sont semblables
- (2) A et A' ont même polynôme caractéristique
 $(-1)^n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ et, pour tout i , $A - \lambda_i \text{Id}_n$ et
 $A' - \lambda_i \text{Id}_n$ ont la même partition associée à

la suite des lignes.

(3) A et A' ont la même fonction module de Jordan.

Démonstration : $(1) \Rightarrow (2)$ Si $A' = P^{-1}AP$,

alors $P_{A'}(X) = P_A(X)$ et

$$\dim \ker ((A' - \lambda_i I)^j)$$

$$= \dim \ker ((P^{-1}AP - \lambda_i I)^j)$$

$$= \dim \ker ((P^{-1}(A - \lambda_i Id)P)^j)$$

$$= \dim \ker (P^{-1}(A - \lambda_i Id)^j P)$$

$$= \dim \ker ((A - \lambda_i Id)^j)$$

pour tout i et pour tout j

$(2) \Rightarrow (3)$ par l'unicité dans le théorème

$(3) \Rightarrow (1)$ car une matrice est semblable à sa fonction module de Jordan et être semblable est une relation d'équivalence