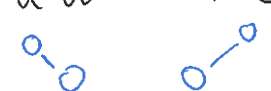
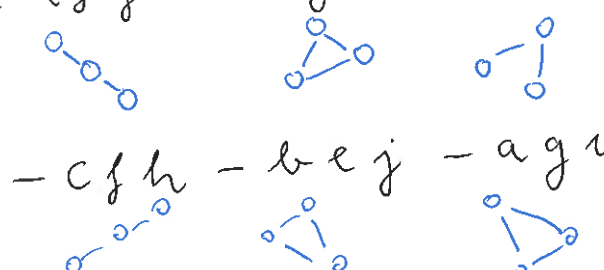


COURS 1 (16 janvier 2024)

Rappels sur les permutations: transpositions, cycles, longueur des cycles, énoncé du théorème de la décomposition en cycles, définition de la signature.

Motivation

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad \text{2 termes}$$


$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} = afj + bgh + eic - cfh - bej - agi$$


6 termes

Comment le définir en général ?

① PERMUTATIONS

Soit $n \geq 1$ un entier.

* Définition. Une permutation est une application bijective $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

on note S_n l'ensemble des permutations.

* S_n a $n!$ éléments

* on peut représenter une permutation $\sigma \in S_n$ par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

For example, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ represents the permutation

$\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

* Comme la composition de deux applications bijectives est une bijection,

$$\sigma, \tau \in S_n \implies \sigma\tau = \sigma \circ \tau \in S_n$$

Example:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas commutative !

[Pour ceux qui ont entendu le mot: S_n est un groupe non abélien]

② TRANSPOSITIONS ET CYCLES

Ce sont des types particuliers de permutations pour lesquelles on utilise une écriture plus condensée.

Définition: Soit $n \geq 2$. Une transposition est une permutation σ telle qu'il existe $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$ tels que

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$


The diagram shows two horizontal arrows. The top arrow starts at 'i' and ends at 'j'. The bottom arrow starts at 'j' and ends at 'i'. Both arrows are blue.

et fixe tous les autres éléments: $\sigma(k) = k$ si $k \neq i$ et $k \neq j$.

* Au lieu d'écrire $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$, on écrit juste $(i \ j)$.

* Plus généralement:

Définition. Soit $r \geq 2$. Un r-cycle est une permutation σ telle qu'il existe

$$i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$$

deux à deux distincts tels que

$$\sigma(i_1) = i_2 \quad \sigma(i_2) = i_3 \quad \dots \quad \sigma(i_r) = i_1$$

et $\sigma(j) = j$ si $j \notin \{i_1, \dots, i_r\}$.

Notation: $(i_1 \dots i_r)$ et on appelle $\{i_1, \dots, i_r\}$ le support de σ . r s'appelle la longueur

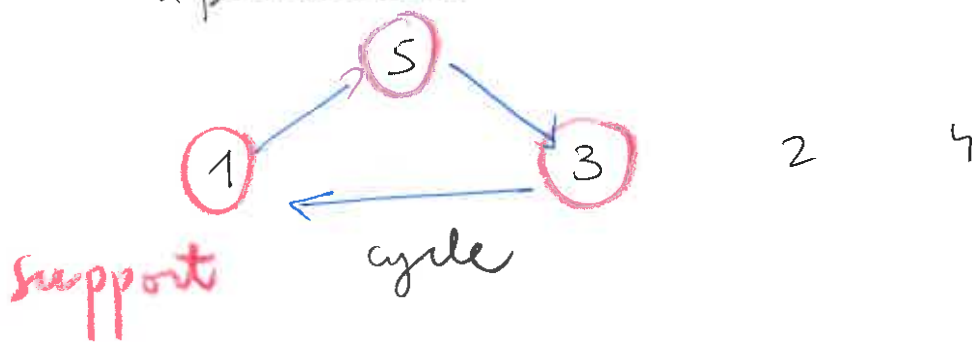
Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est le 3-cycle qu'on note $(1 \ 5 \ 3)$.

* Transposition = 2-cycle

* Explication du nom:



Remarque: Si deux cycles $\sigma, \tau \in S_n$ ont des supports disjoints, alors $\sigma\tau = \tau\sigma$.

En effet, écrivons

$$\{1, \dots, n\} = A \sqcup B \sqcup C$$

support de σ support de τ

Alors:

$$(\sigma\tau)(i) = \begin{cases} \sigma(\tau(i)) & \text{si } i \in B \\ \sigma(i) & \text{si } i \in A \\ i & \text{si } i \in C \end{cases}$$

$$(\tau\sigma)(i) = \begin{cases} \tau(\sigma(i)) & \text{si } i \in A \\ \tau(i) & \text{si } i \in B \\ i & \text{si } i \in C \end{cases}$$

le même résultat reste valable pour la composition de plus de deux cycles à supports disjoints.

③

③ Théorème (décomposition en produit de cycles)

Soit $\sigma \in S_n$. Alors σ s'écrit comme

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_d$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ sont des cycles à supports disjoints, et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. Convention: on n'écrit pas les points fixes.

En pratique:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 8 & 4 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \quad (1 \ 3 \ 6 \ 4)$$

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \quad (2 \ 5 \ 8)$$

$$7 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \quad (7 \ 9)$$

et on trouve $\sigma = (1 \ 3 \ 6 \ 4) (2 \ 5 \ 8) (7 \ 9)$

Démonstration: Par récurrence sur n .

* Initialisation: pour $n=2$, les seules permutations sont l'identité et $(1 \ 2)$ qui est un 2-cycle (produit vide)

* Hypothèse de récurrence: c'est vrai pour $n-1$

* Étape $n-1 \rightarrow n$

Soit $\sigma \in S_n$.

- Si $\sigma(n) = n$, $\sigma|_{\{1, \dots, n-1\}} \in S_{n-1}$ et peut être écrit comme un produit de cycles à support disjoint.
- Si $\sigma(n) \neq n$, disons $\sigma(n) = k$,
alors $\tau = (n \ k) \circ \sigma$ satisfait $\tau(n) = n$
donc $\tau = \underbrace{\sigma_1 \dots \sigma_d}_{\text{cycles à support disjoint}}$ par récurrence.

En composant de deux côtés :

$$\underbrace{(n \ k) (n \ k)}_{Id} \sigma = (n \ k) \sigma_1 \dots \sigma_d$$

$$\Rightarrow \sigma = (n \ k) \sigma_1 \dots \sigma_d$$

Mais les supports peuvent ne plus être disjoints.

* Comme $\tau(n) = n$, $n \notin \text{support des } \sigma_i$

* Si $k \in \text{support}$, on peut supposer que c'est le premier cycle (puisque à la fin on revient à k)

$$\sigma_1 = (k \ i_1 \dots i_m)$$

$$\Rightarrow \sigma = (n \ k) (k \ i_1 \dots i_m)$$

$$= (n \text{ } k \text{ } i_1 \dots i_m)$$

↑
petit
calcul

Enfin: $\sigma = (n \text{ } k \text{ } i_1 \dots i_m) \sigma_1 \dots \sigma_d$

est la décomposition en cycles à support disjoint $\square$

④ S_n est engendré par les transpositions

Théorème: Toute permutation $\sigma \in S_n$ est produit de transpositions.

Démonstration: Comme σ s'écrit

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_d,$$

produit de cycles, il suffit de voir que tout cycle est produit de transpositions.

En effet, si:

$$\sigma = (i_1 \dots i_m)$$

$$= (i_1 \ i_2) (i_2 \dots i_m)$$

$$= (i_1 \ i_2) (i_2 \ i_3) (i_3 \dots i_m)$$

$$= (i_1 \ i_2) (i_2 \ i_3) \dots (i_{m-1} \ i_m)$$

Vérifions:

$$i_1 \rightarrow i_2$$

$$i_2 \rightarrow i_3$$

$$i_{m-1} \rightarrow i_m$$

$$i_m \rightarrow i_{m-1} \rightarrow i_{m-2} \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow i_3 \rightarrow i_2 \rightarrow i_1$$

$\square$

Exemple: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$

$$= (1 \ 2 \ 3) (4 \ 5 \ 6)$$

$$= (1 \ 2) (2 \ 3) (4 \ 5) (5 \ 6)$$

⑤ Signature

Définition: Soit $\sigma \in S_n$ une permutation.

Écrivons $\sigma = \underbrace{s_1 \dots s_p}_{\text{produit de transpositions}}$

La signature de σ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$,

c'est-à-dire

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est produit d'un nombre pair de transpositions} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est produit d'un nombre impair de transpositions.} \end{cases}$$

Mais comme la décomposition en produit de transpositions n'est pas unique, pour que la signature soit bien définie il faut montrer

Théorème: Si $\sigma = s_1 \dots s_p$

$$= t_1 \dots t_q$$

s_i, t_j
transpositions

⑤

alors: p et q ont la même parité, d'où
 $(-1)^p = (-1)^q$

Démonstration: Si $P \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est
 un polynôme à plusieurs variables et $\sigma \in S_n$,
 on pose $\sigma(P) = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)})$.

Par exemple:

$$n=3 \quad P = X_1 X_2 - X_3^2 \quad \sigma = (1 \ 2 \ 3)$$

$$\Rightarrow \sigma(P) = X_2 X_3 - X_1^2$$

On considère le polynôme:

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$$

$$\text{Alors: } \sigma(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)})$$

$$\sigma(X_i - X_j) = \begin{cases} X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)} & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j) \\ -(X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}) & \text{si } \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma(V_n) = \boxed{(-1)^{\ell(\sigma)}} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)}) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)})$$

$$\sigma(V_n) = (-1)^{l(\sigma)} V_n$$

où $l(\sigma) = \left| \{ i < j \mid \sigma(i) > \sigma(j) \} \right|$ nombre d'inversions

But: montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)}$

Supposons que c'est le cas. Alors:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma\tau) V_n &= (\sigma\tau) V_n = \sigma(\varepsilon(\tau) V_n) \\ &= \varepsilon(\tau) \varepsilon(\sigma) V_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau)}$$

ce qui implique la signature est bien définie.

si $\sigma = s_1 \dots s_p = t_1 \dots t_q$, alors

$$\varepsilon(\sigma) = \underbrace{\varepsilon(s_1) \dots \varepsilon(s_p)}_{(-1)^p} = \underbrace{\varepsilon(t_1) \dots \varepsilon(t_q)}_{(-1)^q}$$

Pour montrer l'égalité, il faut étudier le nombre d'inversions d'une transposition:

$(i \ j)$ avec $i < j$

$$\sigma(i) = j > \sigma(j) = i$$

$$\sigma(i) = j > \sigma(k) = k$$

$$\sigma(k) = k > \sigma(j) = i$$

$(i \ j)$

$(i \ k) \quad i < k < j$

$(k \ j) \quad i < k < j$

ce qui donne un total de $1 + 2(j-i-1)$,

$$\text{donc } \sigma((i j)) = (-1)^{1+2(j-i-1)} = -1,$$

et on voit que ε coïncide avec la définition de signature qu'on a donnée. □

Exemple: Un n -cycle a signature $(-1)^{n-1}$.

En effet,

$$\sigma = (i_1 \dots i_n) = \underbrace{(i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{n-1} i_n)}_{n-1 \text{ transpositions}}$$

