FEUILLE DE TD 5

Exercice 1. On considère un polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} - \cdots - a_1\mathrm{X} - a_0$ à coefficients complexes et la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

(1) Montrer que $\det(\mathrm{A} - \mathrm{X}\,\mathrm{id}) = (-1)^n \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que l'espace propre $\mathrm{V}_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1 et en donner un générateur.

(3) Soit m_λ la multiplicité d'une racine λ de P. Déduire la forme normale de Jordan de A.

Exercice 2. Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) Calculer $\mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{X})$ et déterminer ses racines.

(2) Pour chaque racine λ, déterminer une base de chaque $\mathrm{Ker}((\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_4)^i)$, pour $i = 1, 2, \ldots$.

(3) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ donnant la forme normale de Jordan.

Exercice 3. Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer $\mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{X})$ et déterminer ses racines.

(2) Pour chaque racine λ, déterminer une base de chaque $\mathrm{Ker}((\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_4)^i)$, pour $i = 1, 2, \ldots$.

(3) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ donnant la forme normale de Jordan.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une racine n-ième d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_r(\mathrm{K})$ est une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_r(\mathrm{K})$ telle que $\mathrm{B}^n = \mathrm{A}$.

(1) Montrer que tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ admet une racine n-ième.

(2) Pour tout r donner un exemple de matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ qui n'admet pas de racine carrée.

(3) Pour tout r donner un exemple de matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ qui n'admet pas de racine carrée.

Exercice 5. On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Déterminer la décomposition de Dunford de A.

(2) Calculer l'exponentielle de A.

(3) Déterminer les espaces propres, caractéristiques de A et la forme normale de Jordan.

(4) Déterminer les espaces propre de A.

(5) Trouver l'unique fonction différentiable $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ telle que $x(0) = e_1$ et satisfaisant à l'équation différentielle, pout tout $t \in \mathbb{R}$,
$$x'(t) = \mathrm{A}x(t).$$

Exercice 6. On considère la matrice
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$
Trouver l'unique fonction différentiable $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ telle que $x(0) = (1,1,1,1)$ et satisfaisant à l'équation différentielle suivant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$x'(t) = \mathrm{A}x(t).$$

Exercice 7. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \operatorname{Ker} \mathrm{A}^2$. Montrer les assertions suivantes :

(1) $\operatorname{Im} \mathrm{A}$ et $\operatorname{Ker} \mathrm{A}$ sont en somme directe. Déduire que $\operatorname{Im} \mathrm{A}$ est un supplémentaire.

(2) L'application $\operatorname{Im} \mathrm{A} \to \operatorname{Im} \mathrm{A}$, $x \mapsto \mathrm{A}x$ est un isomorphisme.

(3) Il existe une base de $\mathbb{C}^n$ par rapport à la quelle la matrice de l'application linéaire $x \mapsto \mathrm{A}x$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

(4) Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{B}^{\mathrm{N}} = \mathrm{A}$.