FEUILLE DE TD 4

Exercice 1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\det(\mathrm{X} \cdot \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \mathrm{X}^n$.

Exercice 2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice.

(1) Supposons que A est nilpotente. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

(2) Réciproquement, supposons $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Démontrer que A est nilpotente.

(3) Peut-on relaxer l'hypothèse $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$ en gardant la même conclusion ?

Exercice 3. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}_n$.

(1) Calculer le polynôme minimal de A.

(2) Montrer que n est pair.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ telle que

$$\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = ij$ pour tout i, j.

(1) Montrer que A est de rang 1, puis déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$.

(2) Calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$. On suppose que les valeurs propres de A sont $1, -1, i$ et $-i$.

(1) Montrer que A est diagonalisable et inversible.

(2) Exprimer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 7. Soient

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$$

et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

(1) Pour $i = 1, 2, 3, 4$ calculer $\mathrm{J}^2 e_i$, $\mathrm{J}^3 e_i$ et $\mathrm{J}^4 e_i$.

(2) Écrire les matrices $\mathrm{J}^2, \mathrm{J}^3, \mathrm{J}^4$.

(3) On suppose qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{J}$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?

(4) Appliquer alors le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Exercice 8. Soient V un K-espace vectoriel et φ un endomorphisme linéaire de V. Soient $d \geqslant 1$ un entier et $x \in \mathrm{V}$ tels que $\varphi^d(x) = 0$ mais $\varphi^{d-1}(x) \neq 0$ (par définition, $\varphi^0 = \mathrm{id}_\mathrm{V}$). Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), u^2(x), \ldots, \varphi^{d-1}(x)\}$ est libre.

Exercice 9. Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, φ un endomorphisme linéaire de V et $\lambda \in \mathrm{K}$. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{id})^n = \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{id})^{n+1}.$$

Exercice 10. On considère une matrice non nulle

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

À quelle condition A est-elle semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 11. Étant donnés $a, b \in \mathrm{K}^*$, calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Est-ce que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la décomposition de Dunford de la matrice à gauche ?

Exercice 13. Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Calculer la décomposition de Dunford et puis l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$