

FEUILLE DE TD 3

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.
- (2) Peut-on dire si A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
- (3) Déterminer une base de chaque espace propre V_λ .

Exercice 2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.
- (2) Déterminer si B est diagonalisable ou non.

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$, $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et E le sous-espace formé des suites vérifiant la relation $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$.

- (1) Déterminer la dimension de E.
- (2) Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 que l'on déterminera.
- (3) Soit $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $D(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$. Montrer que E est stable par D.
- (4) On suppose que les trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de P sont non nulles et deux à deux distinctes. Montrer que les suites $(\lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.
- (5) On suppose $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = 2$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ tel que $u_0 = 1$ et $u_1 = 4 = u_2$. Déterminer u_{99} et u_{100} .

Exercice 4. Soient $a \in K^\times$ et

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que l'espace propre $\text{Ker}(M_a + a \text{id}_n)$ est de dimension $n - 1$.
- (2) En calculant $\text{Tr}(M_a)$, trouver la dernière valeur propre de M_a . En déduire que M_a est diagonalisable et déterminer le déterminant de M_a .

Exercice 5. On considère les matrices suivantes, à coefficients dans un corps K :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & B_t &= \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & G_t &= \begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $t \in K$. Pour $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ déterminer quand ces matrices sont diagonalisables et les diagonaliser si elles le sont.

Exercice 6. Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 7. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Pour $\sigma \in S_n$ on considère l'application linéaire $\varphi_\sigma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ définie par $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

- (1) Montrer que pour tout $\sigma, \tau \in S_n$ on a $\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau = \varphi_{\sigma \circ \tau}$.
- (2) On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice J de l'application φ_σ et montrer sans calculs que $J^n = \text{id}$.

- (3) Soient $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $\zeta_k = e^{2k\pi i/n}$. Montrer que le vecteur $v_k = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-1} e_i$ est un vecteur propre de J . Déterminer la valeur propre correspondante.
- (4) Montrer que les vecteurs v_k sont linéairement indépendants. (*Indication.* Utiliser le déterminant de Vandermonde.)
- (5) Pour $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ on considère la matrice

$$C(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i J^i \in M_n(\mathbb{C}).$$

Écrire la matrice $C(x_0, x_1, x_2, x_3)$.

- (6) Pour tout $k = 0, \dots, n-1$ montrer que v_k est un vecteur propre de $C(x_0, \dots, x_{n-1})$ et en déterminer la valeur propre correspondante.
- (7) Calculer le déterminant de $C(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Exercice 8. Soit V un K -espace vectoriel de dimension finie.

- (1) Pour une valeur propre $\lambda \in K$ d'un endomorphisme linéaire f de V , soit $V_{(\lambda)}$ l'espace caractéristique correspondant. Si g est un endomorphisme linéaire de V qui commute avec f , montrer que $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_{(\lambda)}) \subset V_{(\lambda)}$.
- (2) Si $f_1, \dots, f_n$ sont des endomorphismes diagonalisables de V qui commutent deux à deux, alors il existe une base de V sur laquelle $f_1, \dots, f_n$ simultanément.