

FEUILLE DE TD 2

Exercice 1. Soient V et W des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $f: V^n \rightarrow W$ une application n -linéaire. Soient $\lambda \in K$ et $x, y \in V$.

- (1) Exprimer $f(\lambda x, \dots, \lambda x)$ en termes de $f(x, \dots, x)$.
- (2) Pour $n = 2, 3$ développer respectivement $f(x + y, x + y)$ et $f(x + y, x + y, x + y)$.
- (3) On suppose f symétrique. Que deviennent les formules précédentes ?
- (4) On suppose f symétrique mais n quelconque. Donner une formule pour $f(x + y, \dots, x + y)$.

Exercice 2. On considère l'application $\omega: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3$$

où $x = (x_1, \dots, x_4)$ et $y = (y_1, \dots, y_4)$.

- (1) Montrer que ω est une application bilinéaire antisymétrique.
- (2) En déduire que si $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $\omega(x, y) = 0$.
- (3) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. On considère l'application $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) := \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right).$$

où $x = (x_1, \dots, x_4)$ et $y = (y_1, \dots, y_4)$. Montrer les affirmations suivantes :

- (1) L'application f est bilinéaire antisymétrique.
- (2) Si $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $f(x, y) = 0$.
- (3) Si $x_1 \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ alors $y = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (4) Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}^4$ non liés tels que $f(x, y) = 0$?
- (5) Trouver une application bilinéaire antisymétrique $g = (g_1, \dots, g_n): \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$ telle que $f = (g_1, g_2, g_3)$ et $g(x, y) = 0$ si et seulement si x, y sont liés.

Exercice 4. Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,8}$ une matrice carrée de taille 8 à coefficients dans un corps K . Dans la formule de $\det(A)$ déterminer le signe correspondant aux termes suivants :

- (1) $a_{1,8} a_{2,7} a_{3,1} a_{4,6} a_{5,3} a_{6,4} a_{7,2} a_{8,5}$;
- (2) $a_{1,8} a_{2,1} a_{3,3} a_{4,6} a_{5,5} a_{6,7} a_{7,4} a_{8,2}$;
- (3) $a_{1,3} a_{2,6} a_{3,4} a_{4,5} a_{5,1} a_{6,8} a_{7,7} a_{8,2}$;
- (4) $a_{1,6} a_{2,5} a_{3,4} a_{4,1} a_{5,2} a_{6,3} a_{7,7} a_{8,8}$.

Exercice 5. On considère la permutation sur 8 éléments suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = (a_{ij}) \in M_8(\mathbb{Q})$ avec $a_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et $a_{ij} = 5$ sinon. Montrer que $\det(A) - 1$ est un multiple de 25. (*Indication.* Utiliser la formule explicite de $\det(A)$ et remarquer que si $\tau \in S_8 \setminus \{\sigma\}$ alors σ et τ diffèrent en deux valeurs.)

Exercice 6. Soient K un corps et $n \geq 1$ un entier. Pour $a_0, \dots, a_n \in K$ on considère le déterminant dit de *Vandermonde*

$$V(a_0, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer la formule suivante :

$$(\heartsuit) \quad V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

- (1) Montrer que $V(a_0, \dots, a_n) = 0$ si $a_i = a_j$ pour certains $i \neq j$.
- (2) Vérifier le résultat pour $n = 1, 2$.
- (3) Montrer la formule

$$(\clubsuit) \quad V(a_0, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (a_i - a_0).$$

- (4) Conclure par récurrence.
- (5) Soit $K[X]_{\leq n}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, montrer que l'application linéaire suivante est un isomorphisme :

$$K[X]_{\leq n} \longrightarrow K^{n+1}, \quad f \longmapsto (f(a_0), \dots, f(a_n)).$$

- (6) Dédurre qu'étant donnés $b_0, \dots, b_n \in K$ il existe un unique polynôme f de degré $\leq n$ tel que $f(a_i) = b_i$.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de donner une preuve différente de $(\clubsuit)$.

- (1) Montrer que $f(X) := V(X, a_1, \dots, a_n) \in K[X]$ est un polynôme de degré $\leq n$.
- (2) Déterminer les racines de f .
- (3) Calculer le coefficient dominant de f .
- (4) Conclure.

Exercice 8. Pour un entier $n \geq 1$ soit

$$A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Q})$$

la matrice dont les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent -1 , ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2 , et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \det(A_n)$.

- (1) Calculer D_1 et D_2 .
- (2) Montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour des entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.
- (3) Soit V l'espace vectoriel formé par les suites $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $u_{i+2} = bu_{i+1} + cu_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que V est un espace vectoriel de dimension 2 .
- (4) Déterminer les $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ distincts tels que $u = (\lambda^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $v = (\mu^i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartiennent à V .

- (5) Montrer que u et v forment une base de V .
- (6) Donner une formule pour D_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9. Soient $a \in K^\times$ et

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire la valeur de $\det(A)$ en fonction de a .

Exercice 10. Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_t := \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & t+6 \\ 4 & 4 & 6-t & 8 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

- (1) Calculer $\det A_t$.
- (2) Déterminer les nombres réels t pour lesquels la matrice A_t n'est pas inversible.
- (3) Déterminer le noyau de A_t pour tout $t \in \mathbb{R}$.