Équirépartition de sommes exponentielles sur les groupes algébriques (avec A. Forey et E. Kowalski)

Autour des mathématiques de François Loeser
Jussieu 10/9/25

1 L'alternative de Larsen

Théorème : Soit $K \subset SU_n$ $(n \geq 2)$ un sous-groupe compact tel que

$$\int_K |\mathrm{tr}(g)|^4 \, d\mu_K(g) = 2$$

mesure de Haar normalisée

Alors soit K est fini soit $K = SU_n$.

e.g. $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ d'ordre 168 plongé dans SU_3 par une représentation irréductible de dim 3

Proof : The integral is equal to

[Katz] $M_4(K) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \right)^K$

et si $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) = \bigoplus V_i^{\oplus n_i}$ est une décomposition en sous-K-représentations, alors $M_4(K) \boxed{\geq} \sum n_i^2$

$= \iff$ irréductibles non isomorphes

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id} \oplus \underbrace{\{ A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \mid \mathrm{tr}\, A = 0 \}}_{E_0}$$

$K \circlearrowright$

$g \cdot A = g A g^{-1}$ $\quad M_4(K) = 2 \implies E_0$ est une représentation irréductible de K

Mais $\{0\} \subset \mathrm{Lie}(K) \otimes \mathbb{C} \subset \mathrm{Lie}(SU_n) \otimes \mathbb{C} = E_0$

$\circlearrowleft$
K action adjointe

en est une sous-représentation, donc soit

$0 = \mathrm{Lie}(K) \Rightarrow K$ is finite

$\mathrm{Lie}(K) = \mathrm{Lie}(SU_n) \Rightarrow K = SU_n$ $\boxtimes$

~~Remark: can also detect Sp_n, SO_n, ...~~

② Sommes exponentielles sur les groupes algébriques

G groupe algébrique commutatif connexe sur un corps fini k (e.g. $\mathbb{A}^n$, $\mathbb{G}_m^n$, variété abélienne, produits ...)

$t = (t_M(\cdot; k_n))_n$ fonction trace

$t_M(\cdot; k_n) : G(k_n) \longrightarrow \mathbb{C}$

objet géométrique

extension de degré $n \subset \bar{k}$

e.g. Ψ un caractère sur $G(k) \xleftarrow{\text{norme}} G(k_n)$

ou $X \subset G$ sous-variété $\rightsquigarrow$ $x \longmapsto \begin{cases} \Psi(x) & x \in X(k_n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Transformée de Fourier discrète

$$S(M, \chi) = \sum_{x \in G(k_n)} t_M(x, k_n) \cdot \chi(x)$$

$\chi : G(k_n) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère

Question : comment les sommes $(S(M, \chi))_{\chi \in \widehat{G}(k_n)}$ se distribuent-elles lorsque $n \to \infty$?

Théorème (avec A. Forey & E. Kowalski)

Sous des hypothèses sur M, il existe un entier $r \geq 1$ et un sous-groupe compact $K \subset U_r$ tel que $(S(M,\chi))_{\chi\in\hat{G}(k_n)}$ se répartissent en moyenne comme des traces de matrices aléatoires dans K, c'est-à-dire

$$\underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N}}_{\text{pour que la limite existe}} \frac{1}{|\hat{G}(k_n)|} \sum_{\chi\in\hat{G}(k_n)} f(S(M,\chi)) = \int_K f(\mathrm{tr}(g))\, d\mu_K(g)$$

pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

e.g. $f = |\cdot|^4$ $\quad \int_K |\mathrm{tr}(g)|^4\, d\mu_K(g)$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_n \frac{1}{|\hat{G}(k_n)|} \sum_\chi |S(M,\chi)|^4$$

* Pour avoir des énoncés d'équirépartition "concrets" pour un M donné, il faut savoir calculer le groupe K. C'est là que l'alternative de Larsen intervient ! Une situation intéressante est :

$$S(M,\chi) = \frac{1}{|k_n|^{\frac{\dim X}{2}}} \sum_{x\in X(k_n)} \chi(x) \quad \text{pour } X \subset G \text{ lisse}$$

Alors
$$\frac{1}{|\hat{G}(k_n)|} \sum_\chi |S(M,\chi)|^4 = \frac{1}{|\hat{G}(k_n)|} \sum_{x_1,\dots,x_4\in X(k_n)} \sum_\chi \chi(x_1+x_2-x_3-x_4)$$

$$= \frac{1}{|k_n|^{2\dim X}} \left|\{x_1+x_2 = x_3+x_4\}\right|$$

(x_1, x_2, x_1, x_2)

(x_1, x_2, x_2, x_1)

* Ensemble de Sidon : $S \subset A$ groupe abélien

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in S \qquad x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ dans A

$\Rightarrow x_1 \in \{x_3, x_4\}$

(seulement les solutions triviales !)

e.g. $S = \{2^m \mid m \geq 0\} \subset A = \mathbb{Z}$ (Sidon)

$\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{F}_p\} \subset \mathbb{F}_p^2 \qquad X \subset \mathbb{A}^2 \quad y = x^2$

$\{(x, x) \mid x \in \mathbb{F}_p^\times\} \subset \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p \qquad \Delta \subset \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1$

$C \hookrightarrow \mathrm{Jac}(C)$ Sidon $\Leftarrow$ C n'est pas hyperelliptique

solution non triviale $\rightsquigarrow$ morphisme de degré 2 $\quad C \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$

* d'autres exemples avec des générateurs généralisés

Théorème : C courbe de genre $g \geq 3$ sur k projective lisse géométriquement connexe

$D = \sum n_i x_i$ diviseur de degré 1 $\qquad (2g-2) \cdot D$ canonique

$\rho : \pi_1^{\text{ét}}(C)^{ab} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ non trivial d'ordre fini

avec $\prod \rho(\mathrm{Frob}_{x_i})^{n_i} = 1$. $\qquad$ hypothèse de Riemann

Fonction L d'Artin : $L(\rho, \frac{T}{\sqrt{K}}) = \det(1 - T \cdot \Theta_{C/k, \rho})$

$= \prod_{x \in C} \det(1 - T^{\deg(x)} \cdot \rho(\mathrm{Frob}_x))$

classe de conjugaison dans U_{2g-2}

③

Si C n'est pas hyperelliptique, $(\Theta_{C/k}, \rho)$ sont équivalents dans SV_{2g-2}.

③ Quelques idées dans la preuve

ℓ premier $\neq$ car k $\quad \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$

$D^b_c(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ catégorie dérivée de faisceaux constructibles sur G

$$\begin{array}{c} \| \\ D^b_c(\mathrm{Perv}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \ni M \end{array} \qquad M_{\bar{x}} \circlearrowleft \mathrm{Frob}_x$$

$\uparrow$ faisceaux pervers sur G

Hypothèse dans le théorème :

M faisceau pervers semi-simple pure de poids 0

But : voir M comme une représentation d'un groupe (semi-simple $\Rightarrow$ réductif) sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et prendre pour K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{C})$

Quel groupe ? Agissant où ?

Cas du groupe additif : $\delta(M, x)$ est aussi une fonction trace ! du faisceau transformée de Fourier $FT(M)$ sur le groupe additif dual ; sur un ouvert c'est un système local

$$\rho : \pi_1^{et}(U) \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

et on peut prendre l'adhérence de l'image de même.

Mais en général il n'y a pas de variété algébrique et de faisceaux paramétrant les caractères et les transformées de Fourier.

Au secours !

Gabber-Loeser, « Faisceaux pervers ℓ-adiques sur un tore », Duke 1996

dans lequel ils donnent une structure de catégorie tannakienne à (une sous-catégorie de) $\mathrm{Perv}(G, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$.

M dans $\mathrm{Perv}(G, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$

$\mathcal{L}_\chi$ faisceau avec fonction trace χ

$$S(M, \chi) = \sum_{x \in G(k)} t_{M \otimes \mathcal{L}}(x; k)$$

$$= \sum_{i=-\dim G}^{\dim G} (-1)^i \, \mathrm{tr}\left(\mathrm{Frob}_k \mid H^i_c(G_{\bar{k}}, M \otimes \mathcal{L}_\chi)\right)$$

valeurs propres de valeur absolue $\leq |k|^{i/2}$

Théorème d'annulation générique

$$\mathcal{X}(k_n) = \left\{ \chi \in \hat{G}(k_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} H^i_c(G_{\bar{k}}, M \otimes \mathcal{L}_\chi) = H^i(G_{\bar{k}}, M \otimes \mathcal{L}_\chi) = 0 \\ H^0_c = H^0 \end{array} \right\}$$

est générique $\quad \left| \hat{G}(k_n) \setminus \mathcal{X}(k_n) \right| \ll |k_n|^{\dim G - 1}$ lorsque $n \to \infty$

taille $|k_n|^{\dim G}$

Pour appliquer le critère de Weyl, on a typiquement besoin de contrôler les puissances de $S(M, X)$:

$$S(M, X)\cdot S(N, X) = S(M *_! N, X)$$

pour le produit de convolution

$$M *_! N = Rm_!(M \boxtimes N) \qquad \begin{array}{c} G\times G \\ \downarrow m \\ G \end{array}$$

bien défini sur $D_c^{b}(G, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$

mais la sous-catégorie $\mathrm{Perv}(G, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$

n'est pas stable

(Cas affine: obstruction est que le morphisme d'oubli de supports $M *_! N \longrightarrow M * N$ soit un isomorphisme)

$$\overline{\mathrm{Perv}}(G, \mathbb{Q}_\ell)$$
$$\cup$$
$$\omega_X : \langle M \rangle^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$$
$$N \longmapsto H^0_c(G_{\bar{k}}, N \otimes \mathcal{L}_X) \circlearrowleft \mathrm{Frob}_k$$

foncteur fibre pour X générique