# Catégories tannakiennes

Thème : comment reconstruire un groupe à partir de ses représentations ?

## 1 Pontriaguine et Tannaka-Krein

$G$ groupe $\boxed{\text{abélien}}$ localement compact

Un caractère unitaire est un morphisme continu

$$\chi : G \longrightarrow S^1$$

Soit $G^\vee$ = groupe des caractères unitaires.
Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, c'est un groupe topologique localement compact, qui est discret $\Leftrightarrow$ $G$ est compact
(e.g. $(S^1)^\vee = \mathbb{Z}$ via $z \mapsto z^n$)

Théorème (Dualité de Pontriaguine)

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow (G^\vee)^\vee \\ g &\longmapsto (\chi \mapsto \chi(g)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes topologiques.

On peut donc reconstruire $G$ à partir des caractères.

Et si le groupe n'est pas abélien ?
les caractères ne suffisent pas, il faut regarder toutes les représentations.

On suppose $G$ compact.

$\mathrm{Rep}(G)$ = catégorie des représentations

$(V, \pi_V)$ $\qquad \pi_V : G \xrightarrow[\text{continue}]{} GL(V)$

ℂ vectoriel de dim finie

+ foncteur d'oubli

$$\omega : \mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$$
$$(V, \pi_V) \longmapsto V$$

On considère $\mathrm{End}(\omega)$, l'ensemble des

$u = (u_V)_{V \in \mathrm{Rep}(G)}$ $\qquad u_V : V \xrightarrow[\mathbb{C}\text{-linéaire}]{} V$

telles que

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "u_V"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r, "u_W"'] & W
\end{tikzcd}$$

pour tout morphisme $f : V \to W$ dans $\mathrm{Rep}(G)$.

+ topologie la moins fine qui rend toutes les projections $\mathrm{End}(\omega) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ continues.

$$u \longmapsto u_V$$

Exemple: pour $g \in G$, $\quad \pi(g) = (\pi_V(g))_{V \in \mathrm{Rep}(G)}$

d'où une application $\quad \pi : G \longrightarrow \mathrm{End}(\omega)$

$$g \longmapsto \pi(g)$$

Comment caractériser les transformations naturelles de la forme $\pi(g)$ ?

$T(G) \subset \mathrm{End}(\omega)$ sous-ensemble des

- $u_{V \otimes W} = u_V \otimes u_W$
- $u_{\mathbb{1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{1}}$, où $\mathbb{1}$ est la représentation triviale de dimension 1
- $u = \bar{u}$, où $\bar{u}_V(x) = \overline{u_{\bar{V}}(\bar{x})}$

avec $V \longrightarrow \bar{V} = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\to -}$, $x \longmapsto \bar{x}$ le conjugué complexe.

On a : $G \longrightarrow T(G)$

(1) $T(G)$ est un groupe topologique

($u_V$ est inversible par l'entrée de $V^\vee$)

(2) $T(G)$ est compact

(pour tout $V$, $u_V$ préserve une forme hermitienne définie positive).

Théorème (de Tannaka-Krein)

$\pi : G \longrightarrow T(G)$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

Outil principal : le théorème de Peter-Weyl

① Pour tout $g \in G$, $g \neq e$, il existe $(V, \pi_V) \in Rep(G)$ telle que $\pi_V(g) \neq Id_V$. $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{injectivité}}$

② Toute fonction continue sur un groupe compact peut être approchée uniformément par des coefficients matriciels, i.e. combinaisons $\mathbb{C}$-linéaires de fonctions

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$g \longmapsto \ell(\pi_V(g)(v))$$

pour $(V, \pi_V) \in Rep(G)$
$v \in V$
$\ell \in V^\vee = Hom(V, K)$

$\Longrightarrow$ $$\int_{T(G)} f(u)\, du = \int_G f(\pi(g))\, dg \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}^0(G, \mathbb{C})$$

(si $Im(\pi) \subsetneq T(G)$, on choisit $f$ à support dans le complémentaire et intégrale $> 0$) $\square$

② Théorème de Galois

$K$ corps, $K^{sep}$ = clôture séparable

$$Gal(K^{sep}/K) = \{\sigma \in Aut(K^{sep}) \mid \sigma_{|K} = id\}$$
$$= \varprojlim_{\substack{F/K \text{ finie} \\ \text{galoisienne } (\subset K^{sep})}} Gal(F/K)$$ groupe profini

point de vue de Grothendieck :

F k-algèbre de dimension finie sur k commutative

est étale si $F \simeq \prod_{\alpha} k_\alpha / k$ ← extension finie séparable

$Y = \mathrm{Spec}(F)$ dimension 0 sur k
(schéma fini étale)

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{schémas finis} \\ \text{étales} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ensembles} \\ \text{finis} \end{array} \right\}$$

$$Y \longmapsto Y(k^{sep})$$

On peut reconstruire le groupe de Galois de k avec le groupe d'automorphismes de ce foncteur : $\circlearrowleft \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$

$(\sigma_Y)_{Y \text{ fini étale}}$ $\sigma_Y \in \mathrm{Bij}(Y(k^{sep}))$
compatibles avec les morphismes de schémas finis étales.

équivalence de catégories :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{schémas finis} \\ \text{étales} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{ensembles finis +} \\ \text{action continue} \\ \text{de } \mathrm{Gal}(k^{sep}/k) \end{array} \right\}$$

Généralisations possibles :

① remplacer k par un schéma quelconque

$$\mathrm{Fib}_{\bar{x}} : \left\{ \begin{array}{c} \text{revêtements} \\ \text{finis étales} \\ \text{de } X \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ensembles} \\ \text{finis} \end{array} \right\}$$

$$Y \to X \longmapsto Y_{\bar{x}} = Y \times_X \mathrm{Spec}(\Omega)$$

point géométrique $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$

groupe d'automorphismes : $\pi_1^{ét}(X, \bar{x})$ groupe fondamental étale

(c'est un groupe profini, $\pi_1^{ét}(X, \bar{x}) = \widehat{\pi_1^{top}(X(\mathbb{C}), x)}$ si $X/\mathbb{C}$)

$$\widehat{G} = \varprojlim_{\substack{N \lhd G \\ \text{indice fini}}} G/N$$

② $\mathbb{Q}$-linéariser

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d] & \{\text{schémas finis étales}\} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \{\text{ensembles finis + action continue de } Gal(k^{sep}/k)\} \arrow[d, "S \mapsto \mathbb{Q}^S"] \\
H^0(Y) & \{\text{motifs d'Artin}\} \arrow[r, "\sim"] & \{\mathbb{Q}\text{-vectoriels dim finie + action continue de } Gal(k^{sep}/k)\}
\end{tikzcd}$$

$(g \cdot f)(s) = f(g^{-1}s)$

Et pour les variétés de dimension $> 0$ ?

<u>Espoir</u> : définir une catégorie de motifs, ayant des objets $H^n(Y)$, et montrer que c'est la catégorie des représentations d'un groupe pro-algébrique : le groupe de Galois motivique

③ Catégories tannakiennes neutres

$\boxed{k \text{ corps de base}}$

<u>Définition</u> : $\mathcal{C}$ catégorie abélienne $k$-linéaire

$\oplus$, noyaux, conoyaux, ..

Hom $k$-espaces vectoriels + composition bilinéaire

$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ foncteur bilinéaire

contraintes d'associativité : $X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z$

commutativité $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$

(4)

objet unité $\mathbb{1}$ ($\mathbb{1} \simeq \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$, $X \mapsto X \otimes \mathbb{1}$, $X \mapsto \mathbb{1} \otimes X$ sont des équivalences de catégories)

- rigide : $X^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1})$ dual existe

Hom interne

$\mathrm{Hom}(T, \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1})) \simeq (T \otimes X, \mathbb{1})$

$X \mapsto (X^\vee)^\vee$ isomorphisme

- $\mathrm{End}(\mathbb{1}) = k$
- Il existe un foncteur fibre

$w : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ exact, $k$-linéaire, $\otimes$

$F(\cdot) \otimes F(\cdot)$
$\downarrow$
$F(\cdot \otimes \cdot)$

compatible aux contraintes

On définit alors :

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(w)(R) = \{ (\lambda_X)_{X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} \mid$$

$R$ : $k$-algèbre

$\lambda_X : w(X) \otimes_k R \longrightarrow w(X) \otimes_k R$ $R$-linéaire

fonctoriel, compatible au produit $\otimes$ et à $\mathbb{1}$ }

Théorème principal des catégories tannakiennes :

① Le foncteur $R \mapsto \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(w)(R)$ est représentable par un schéma en groupes affine $G$ sur $k$

② $\mathcal{C} \xrightarrow{\ \vee\ } \mathrm{Rep}_k(G)$

$X \longmapsto \omega(X) \circlearrowleft \underline{\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)}$

est une équivalence de catégories.

<u>Outil</u> : coefficients matriciels

$(X, v, f)$ $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $v \in \omega(X)$, $f \in \omega(X)^{\vee}$

modulo les relations de linéarité, fonctorialité

$\varphi : X \to X'$ $\qquad (X, v, \omega(\varphi)^{\vee} f')$

$\omega(\varphi) : \omega(X) \to \omega(X')$ $\qquad = (X', \omega(\varphi)v, f')$

$\omega(\varphi)^{\vee} = \omega(X')^{\vee} \to \omega(X)^{\vee}$

on note $[X, v, f]$ la <u>classe</u>.

<u>produit</u> : $[X, v, f] \otimes [X', v', f'] = [X \otimes X', v \otimes v', f \otimes f']$

<u>coproduit</u> : $\Delta[X, v, f] = \sum_{i=1}^{\dim \omega(X)} [X, e_i, f] \otimes [X, v, e_i^{\vee}]$

base de $\omega(X)$

$(X, v, f)$ définit la fonction

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)(R) \longmapsto R$$
$$\lambda_X \longmapsto f(\lambda_X(v))$$

$\mathcal{O}(G)$ = coefficients matriciels

<u>Exemple</u> : $\mathcal{C}$ catégorie des espaces vectoriels gradués

$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ + foncteur d'oubli

$\boxed{\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}_k(\mathbb{G}_m)}$

c'est une catégorie semi-simple

avec objets simples $k_n$

$\mathrm{Hom}(k_n, k_m) = \begin{cases} k & n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\qquad k_n \otimes k_m = k_{n+m}$

$t = [K_1, v, v^\vee]$ $v$ élément non nul de $\omega(K_1) \simeq k$

Alors, $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)) = k[t, t^{-1}]$

avec $\Delta t = t \otimes t$.

Exemple : $\mathcal{C}$ structures de Hodge réelles graduées

$H$, $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q} H^{p,q}$ $\quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$

$\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$ oubli

$\boxed{\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}(\mathbb{S})}$

Thm de Deligne : groupe algébrique sur $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$

$\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$

$\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$