

Catégorie Tomatiennes

Thème: comment reconstruire un groupe à partir de ses représentations ?

① Pontrjaguine et Tannaka-Krein

↳ groupe alébien localement compact

Une caractère est un morphisme continu

$$\chi: G \longrightarrow S^1$$

Soit $G^\vee =$ groupe des caractères continus.

Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, c'est un groupe topologique localement compact, qui est discret $\Leftrightarrow G$ est compact
(e.g. $(S^1)^\vee = \mathbb{Z}$ via $z \mapsto z^n$)

Théorème (Dualité de Pontrjaguine)

$$G \longrightarrow (G^\vee)^\vee$$

$$g \longmapsto (\chi \mapsto \chi(g))$$

est un isomorphisme de groupes topologiques.

on peut donc récupérer G à partir des caractères.

Et si le groupe n'est pas alébien ?

les caractères ne suffisent pas, il faut regarder toutes les représentations.

On suppose G compact.

$\text{Rep}(G)$ = catégorie des représentations

$$(V, \pi_V) \quad \pi_V: G \longrightarrow GL(V)$$

continue

↙
Ojectif
de dimension finie

+ foncteur d'oubli

$$w: \text{Rep}(G) \longrightarrow \text{Vect}_0$$

$$(V, \pi_V) \longmapsto V$$

On considère $\text{End}(w)$, l'ensemble des

$$u = \{u_V\}_{V \in \text{Rep}(G)} \quad u_V: V \xrightarrow{G\text{-linéaire}} V$$

tels que

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{u_V} & V \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{u_W} & W \end{array}$$

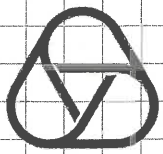
pour tout morphisme $f: V \rightarrow W$ dans $\text{Rep}(G)$.

+ trouver la moins fine qui rend toutes les projections $\text{End}(w) \rightarrow \text{End}(V)$ continues.

$$u \longmapsto u_V$$

Exemple: pour $g \in G$, $\pi(g) = (\pi_V(g))_{V \in \text{Rep}(G)}$

d'où une application $\pi: G \longrightarrow \text{End}(w)$
 $g \longmapsto \pi(g)$



Comment caractériser les transformations naturelles
de la fibre $\pi(g)$? ②

$T(G) \subset \text{End}(W)$ sous-ensemble des

- $\mu_{V \otimes W} = \mu_V \otimes \mu_W$
- $\mu_{\mathbb{1}} = \text{Id}_{\mathbb{1}}$, où $\mathbb{1}$ est la représentation
triviale de dimension 1
- $\mu = \bar{\mu}$, où $\bar{\mu}_V(x) = \overline{\mu_{\bar{V}}(\bar{x})}$

$$\text{avec } V \longrightarrow \bar{V} = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C} \\ x \longmapsto \bar{x}$$

le conjugué complexe.

On a: $G \longrightarrow T(G)$

(1) $T(G)$ est un groupe tropyze

(μ_V est inversible par l'existence de V^V)

(2) $T(G)$ est conject

(pour tout V , μ_V possède une fibre horizontale
dégénérée).

Théorème (de Tanaka-Krein)

$\pi: G \longrightarrow T(G)$ est un isomorphisme
de groupes tropyzes.

Outil principal: le théorème de Peter-Weyl

① Pour tout $g \in G, g \neq e$, il existe $(V, \pi_V) \in \text{Rep}(G)$
 telle que $\pi_V(g) \neq \text{Id}_V$. \Rightarrow injectivité

② Toute fonction continue sur un groupe compact
 peut être approchée uniformément par des coefficients
naturiels, i.e. combinaisons \mathbb{C} -linéaires de

$$\text{fonctions } f: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \chi(\pi_V(g)(v))$$

pour $(V, \pi_V) \in \text{Rep}(G)$

$$v \in V$$

$$\chi \in V^V = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow \int_{T(G)} f(\mu) d\mu = \int_G f(\pi(g)) dg \quad \text{pour tout } f \in C_c(G, \mathbb{C})$$

(si $\text{Im}(\pi) \neq T(G)$, on choisit f à support dans le
 complémentaire et intégrale > 0) □

② Théorème de Galois

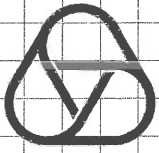
K corp, K^{sep} clôture séparable

$$\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) = \{ \sigma \in \text{Aut}(K^{\text{sep}}) \mid \sigma|_K = \text{id} \}$$

$$= \varprojlim \text{Gal}(F/K)$$

F/K finie
 galoisienne ($\subset K^{\text{sep}}$)

groupe
 profini



point de vue de Grothendieck:

F k -algèbre de dimension finie sur k
commutative

est étale si $F \cong \prod_{\alpha} k_{\alpha}/k$ ← extension finie séparable

$Y = \text{Spec}(F)$ dimension 0 sur k
(schéma fini étale)



$Y \longmapsto Y(k^{sep})$

on peut construire le groupe de Galois de k avec
le groupe d'automorphismes de ce schéma:

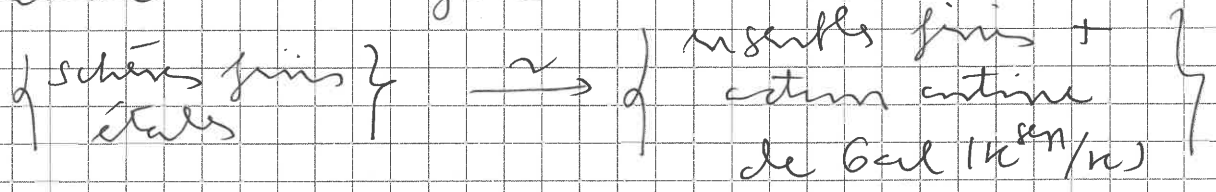
(σ_Y) Y fini étale

$\sigma_Y \in \text{Bij}(Y(k^{sep}))$

$\hookrightarrow \text{Gal}(k^{sep}/k)$

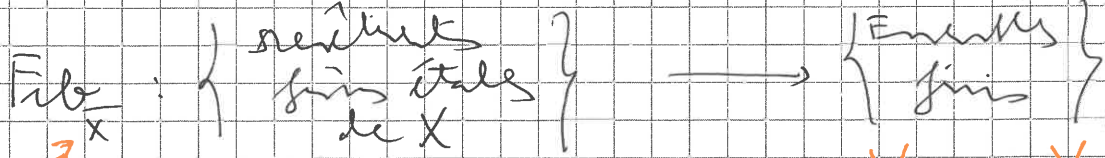
compatibles avec les
isomorphismes de schémas finis étale.

équivalence de catégories:



Généralisation possible:

① remplacer k par un schéma quelconque



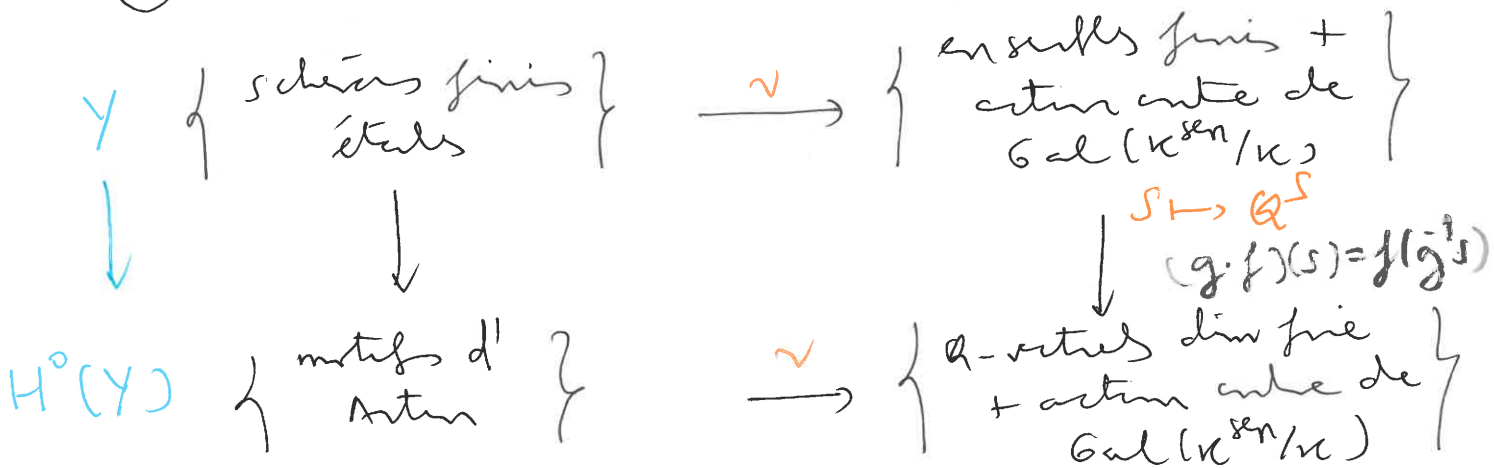
point générique $\bar{x}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$

$Y \rightarrow X \longmapsto Y_{\bar{x}} = Y \times_X \text{Spec}(\Omega)$

groupe d'automorphismes : $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ groupe
projetal étale

(soit un groupe profini, $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim_{N \triangleleft G} G/N$
 si X/\mathbb{C})

② \mathbb{Q} -linéariser



Et pour les variétés de dimension > 0 ?

Esquisse: définir une catégorie de motifs, ayant
 des objets $H^n(Y)$, et montrer que c'est la caté-
 gorie des représentations d'un groupe pro-étale :
 le groupe de Galois motivique

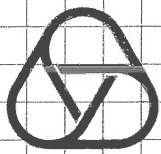
③ Catégories tensorielles motiviques

K corps de base

Définition: \mathcal{C} catégorie abélienne K -linéaire
 \oplus , noyau, conoyau, ...
 Hom K -espaces
 vecteurs +
 action
 linéaire

\otimes : $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ foncteur bilinéaire

contraintes d'associativité: $X \otimes (Y \otimes Z) \cong (X \otimes Y) \otimes Z$
 commutativité: $X \otimes Y \cong Y \otimes X$



objet unité $\mathbb{1}$ ($\mathbb{1} \simeq \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$, $X \mapsto X \otimes \mathbb{1}$ sont des équivalences de catégories)

• rigide: $X^\vee = \underline{\text{Hom}}(X, \mathbb{1})$ dual existe

$X \mapsto (X^\vee)^\vee$
isomorphisme

\uparrow Hom interne

$$\underline{\text{Hom}}(T, \underline{\text{Hom}}(X, \mathbb{1})) \simeq (T \otimes X, \mathbb{1})$$

• $\text{End}(\mathbb{1}) = k$

• Il existe un foncteur filtré

$w: \mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}_k$ exact, k -linéaire,

$$\otimes \quad F(\cdot) \otimes F(\cdot) \\ \downarrow \\ F(\cdot \otimes \cdot) \\ \text{compatible aux constantes}$$

on définit alors:

$$\underline{\text{Aut}}^{\otimes}(w)(R) = \left\{ (\lambda_X)_{X \in \text{ob}(\mathcal{C})} \mid \right.$$

\uparrow
 k -algèbre

$$\lambda_X: w(X) \otimes_k R \rightarrow w(X) \otimes_k R$$

R -linéaire

fonctoriel, compatible au produit \otimes et à $\mathbb{1}$ }

Théorème principal des catégories tordues:

① le foncteur $R \mapsto \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(w)(R)$ est représentable par un schéma en groupes affine G sur k

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{C} \xrightarrow{\nu} \text{Rep}_k(\mathcal{G})$$

$$X \longmapsto w(X) \hookrightarrow \text{Aut}^\otimes(w)$$

est un équivalence de catégories.

outils: coefficients naturels

$$(X, \nu, f) \quad X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \nu \in w(X), f \in w(X)^\vee$$

valant les relations de bilinéarité, pureté

$$\begin{aligned} \varphi: X &\rightarrow X' & (X, \nu, w(\varphi)^\vee f') \\ w(\varphi): w(X) &\rightarrow w(X') & = (X', w(\varphi)\nu, f') \\ w(\varphi)^\vee = w(X')^\vee &\rightarrow w(X)^\vee & \end{aligned}$$

on note $[X, \nu, f]$ la classe.

produit: $[X, \nu, f] \otimes [X', \nu', f'] = [X \otimes X', \nu \otimes \nu', f \otimes f']$

coproduit: $\Delta[X, \nu, f] = \sum_{i=1}^{\dim w(X)} [X, e_i, f] \otimes [X, \nu, e_i^\vee]$
↑ base de $w(X)$

(X, ν, f) définit la fonction

$$\text{Aut}^\otimes(w)(R) \longmapsto R$$

$$\lambda_X \longmapsto f(\lambda_X(\nu))$$

$\mathcal{O}(\mathcal{G}) =$ coefficients naturels

Exemple: \mathcal{C} catégorie des espaces vectoriels gradués

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n \quad + \text{foncteurs d'oubli}$$

$\mathcal{C} \simeq \text{Rep}_k(\mathcal{G}_m)$

C'est une catégorie monochrome avec objets simples k_n

$$\text{Hom}(k_n, k_m) = \begin{cases} k & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad k_n \otimes k_m = k_{n+m}$$

$$t = [k_1, v, v^v] \quad v \text{ est un mul de } w(k_1) \cong k$$

$$\text{Alors, } \mathcal{O}(\text{Aut}^\otimes(w)) = k[t, t^{-1}]$$

$$\text{avec } \Delta t = t \otimes t.$$

Exemple: \mathcal{G} structures de Hodge réelles scindées

$$H, H_{\mathbb{C}} = \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \end{matrix} H^{p,q} \quad \overline{H}^{p,q} = H^{q,p}$$

$$w: \mathcal{G} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}} \text{ oukii}$$

$$\mathcal{G} \cong \text{Rep}(\mathcal{S})$$

trava de Deligne :
 groupe algébrique sur \mathbb{R}
 avec $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^x$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^x \times \mathbb{C}^x$$