

MOMENTS DE FONCTIONS L ET STABILITÉ HOMOLOGIQUE

d'après

[BDPW] Bergström - Diaconu - Petersen - Westerland

[MPPRW] Müller - Patzt - Petersen - Rørdal - Williams

I) Énoncé

q puissance d'un premier impair, $g \geq 1$

$$\mathcal{P}_{2g+1} = \left\{ d \in \mathbb{F}_q[x] \text{ unitaire, sans facteur } \right. \\ \left. \text{carré, } \deg d = 2g+1 \right\}$$

Pour chaque $d \in \mathcal{P}_{2g+1}$, fonction L

$$L(s, X_d) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{F}_q[x] \\ \text{unitaire}}} \frac{X_d(m)}{q^{s \deg m}} \longleftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{X_d(n)}{n^s}$$

où $X_d(m) = \left(\frac{d}{m} \right)$ est le symbole quadratique

$$\text{si } m \text{ est irréductible, } X_d(m) = \begin{cases} 0 & m \nmid d \\ 1 & d \text{ est un carré mod } m \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est une fonction entière
+ équation fonctionnelle

$s \leftrightarrow 1-s$

$$L(s, X_d) = q^{g(1-2s)} L(1-s, X_d)$$

Question: distribution des valeurs centrales

$$L\left(\frac{1}{2}, X_d\right) \text{ pour } d \in \mathcal{P}_{2g+1} ?$$

Pour chaque $r \geq 1$, le moment

$$m_2(g) = \frac{1}{q^{2g+1}} \sum_{d \in \mathcal{P}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, X_d\right)^2$$

Conjecture (Arndt-Keating, 2014)

Il existe un polynôme explicite Q_r
de degré $\frac{r(r+1)}{2}$ tel que

$$m_2(g) - Q_r(2g+1) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} 0$$

Théorème (BDPW, 2024) q, r donnés

Il existe Q_r comme ci-dessus et $C > 0$
explicite indépendant de q et r tels que,
pour tout g

$$|m_2(g) - Q_r(2g+1)| \leq C \cdot \frac{q^{(r+1)} - q^{\frac{r+6}{12}}}{q}$$

En particulier, pour chaque $r \geq 1$, la conjecture
est vraie lorsque $q > 2^{24(r+1)}$.

II) Motivation

* Analyse sur les corps de fonctions de conjectures de Conrey-Farmer-Keating-Rubinstein-Snaith sur la distribution de $L(\frac{1}{2}, \pi)$ pour des familles de fonctions L

* Exemple: $J(\frac{1}{2} + it)$ pour $t \in \mathbb{R}$

C'est un thème de Selberg qe

$$\begin{array}{ccc}
 L_T & \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\text{loi}} & \text{gaussienne réelle} \\
 \nearrow \sqrt{\frac{1}{2} \log \log T} & & \\
 \text{variable aléatoire sur } [-T, T] & L_T(t) = \begin{cases} 0 & J(\frac{1}{2} + it) = 0 \\ \log |J(\frac{1}{2} + it)| & \text{sinon} \end{cases} &
 \end{array}$$

et pour mieux comprendre la distribution il faut lever les moments

$$\int_0^T |J(\frac{1}{2} + it)|^{2\alpha} dt$$

prédiction basée sur la théorie des matrices aléatoires
 $\sim C_\alpha T \log^{2\alpha} T$

* Pour la famille discrète $L(\frac{1}{2}, \chi_d)$

il y a un analogue parfait sur les corps finis. Comme seulement pour $d \leq 3$ malgré l'hypothèse de Riemann (Flower 2017)

↑ conjecture de Dirichlet

III) Stratégie de preuve

a) réinterpréter la fonction L géométriquement

$C_d: y^2 = d(x)$ courbe hyperelliptique affine
sur $\mathbb{F}_q$ (lisse, un point à l'infini,
genre g)

à partir de $H_{\text{ét}}^1(C_d \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)$ ↪ Frob_q

$\dim 2g +$ forme symplectique

$$L(s, X_d) = \prod_{j=1}^{2g} (1 - q^{-s} \omega_j)$$

↖ valeurs propres
de Frob_q

b) mettre en feuille

$X = \text{Conf}_{2g+1}(\mathbb{A}^1)$ l'espace de configurations
de $2g+1$ points distincts non ordonnés $/\mathbb{Z}$

* $X(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{P}_{2g+1}$

* sur $X \otimes \mathbb{F}_q$ il y a un système local
l-codage $\mathcal{W} = R^1 p_! \mathbb{Q}_\ell$ où $\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & y^2 = d(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \ni & d \end{array}$

$L(\frac{1}{2}, X_d)$ est la trace de Frobenius sur
la fibre en $d \in X(\mathbb{F}_q)$ de

comme une représentation

$$\beta_{2g+1} \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$$

« de Burau
réduite »

Le théorème de comparaison d'Artin donne

$$H_k^{\text{ét}}(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{W}_\lambda) \cong H_k(\beta_{2g+1}, V_\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\lambda$$

$\uparrow$
homologie de groupes

IV) stabilité homologique

Pour chaque degré k , il y a des applications

$$H_k(\beta_{2g+1}, V_\lambda) \longrightarrow H_k(\beta_{2g+3}, V_\lambda)$$

induites par l'inclusion $\beta_{2g+1} \subset \beta_{2g+3}$
et en voyant V_λ comme représentation d'un
groupe symplectique plus grand.

Questions: * isomorphismes pour g grand?

* que vaut l'homologie stable

$$H_k(\beta_\infty, V_\lambda) = \varinjlim_g H_k(\beta_{2g+1}, V_\lambda) ?$$

réponse plus structurée (e.g. conjecture de Mumford)

$$\underbrace{\wedge \mathbb{W}(\frac{1}{2})}_{\substack{\uparrow \\ \text{demi twist} \\ \text{de Tate}}} = \bigoplus_{i=0}^{2g} \wedge^i \mathbb{W}(\frac{1}{2})$$

Formule de traces de Guthrie

$$\frac{1}{q^{2g+1}} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{2g+1}} L(\frac{1}{2}, X_\lambda)^2 = \sum_k (-1)^k \text{tr} (\text{Frob}_q | H_k^{\text{et}}(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, (\wedge^{\otimes 2} \mathbb{W}(\frac{1}{2})))$$

Idee: décomposer $(\wedge \mathbb{W}(\frac{1}{2}))^2$ en représentations irréductibles $\mathbb{W}_\lambda$ de Sp_{2g} et étudier charge contribution $\leftrightarrow$ partitions
 $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_g \geq 0)$

c) montée vers les complexes

$X(\mathbb{C}) = K(\beta_{2g+1}, 1)$ espace classifiant pour les groupes de tresses d'Artin

$$\beta_{2g+1} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{2g} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| \geq 2 \end{array} \rangle$$

et on peut voir le système local $V = R^1 p_! \mathbb{Q}$ sur $X(\mathbb{C})$

- Théorème (Randal-Williams - Wahl, 2017)

C'est un isomorphisme si $2k < 2g + 3 - |\lambda|$.

$\uparrow$
 $\sum \lambda_i$

- Théorème (BDPW 2024)

Calcul de la série génératrice

$$\sum_k \sum_{\lambda} \dim H_k(\beta_{\infty}, V_{\lambda}) (-z)^k S_{\lambda}$$

dans une completion de $\Lambda[z]$

$\uparrow$
fonctions symétriques
en $x_1, x_2, \dots$

$\uparrow$
polynôme de Schur

→ annulation en degrés $k < |\lambda|/4$

$$k < \ell(\lambda)/2$$

$$\rightarrow \sum_k \dim H_k(\beta_{\infty}, V_{\lambda}) (-z)^k$$

est une fonction rationnelle avec tous les pôles dans $|z| = 1$.

- Théorème (BDPW 2024)

L'action de Frobenius sur l'homologie stable $H_{\text{ét}}^k(X_{\infty} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, V_{\lambda}(\frac{|\lambda|}{2}))$ est donnée par multiplication par q^{-k} . pure Tate de poids $-2k$

Difficulté: les applications de stabilisation
sont transcendentes! (Par exemple, $\beta_{2g+1} \rightarrow \beta_{2g+3}$
n'est pas induit par un

- Théorème (MPPRW, 2024) uniforme de stabilité alg)

$$H_k(\beta_{2g+1}, V_\lambda) \rightarrow H_k(\beta_{2g+3}, V_\lambda)$$

est un isomorphisme pour tout λ avec
 $\ell(\lambda) \leq g$ et tout $k \leq g/6 + 1$. stabilité
homologie
uniforme

V) Application

$$Q_2(2g+1) = \sum_{\lambda_1 \leq 2} \sum_k (-1)^k \text{tr} | \text{Frob}_q |$$

$\underbrace{H_k^{\text{ét}}(X_\infty \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, V_\lambda(\frac{|\lambda|}{2}))}_{\text{convergence}} \cdot \dim V_{\lambda^+(g)}$

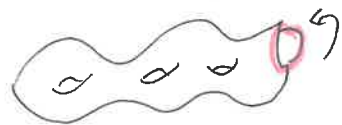
accord parfait avec les prédictions!

représentation de Sp_{2g}

La diffère avec $m_2(g)$ est
liée en utilisant Weil II et des
bornes sur les modules de Betti de $X(\mathbb{C})$.

VI) Idee du calcul de l'homologie stable

- H_g^1 espace de modules de surfaces hyperelliptiques avec une composante de bord fixée par l'involution



X espace avec action de $\mathbb{Z}/2$

$$\text{map}_{\mathbb{Z}/2}^*(S_{g,1}/\mathbb{Z}S_{g,1}, X) \rightarrow H_g^1(X) \xrightarrow{\text{application}} H_g^1$$

$S_{g,1} \rightarrow X$
 $\mathbb{Z}/2$ -équivalente

- on choisit $X = KA = \prod K(A_i, i)$ action induite par $X \mapsto -X$
 espace d'Eilenberg-MacLane associé à un $\mathbb{Q}$ -reseau gradué $A = \bigoplus A_i$.
 $\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q} = A$
 $H_*(X, \mathbb{Q}) = \text{Sym}(A)$

$$\begin{aligned}
 & \xRightarrow{\text{suite spectrale de Serre}} H_* (H_g^1(KA), \mathbb{Q}) \\
 & = \bigoplus_{\lambda} S^{\lambda}(A) \otimes \left(\bigotimes_{\lambda} H_* (\beta_{2g+1}, S^{\lambda}(V[-1])) \right)
 \end{aligned}$$

foncteurs de Schur

$\Rightarrow$ stabilité homologique

Trouver un autre moyen de calculer le foncteur $A \mapsto H_* (H_g^1(KA), \mathbb{Q})$.

- Structure multiplicative: $M = \prod_{g \geq 0} H_g^1(KA)$

$$\{\text{espaces} \atop \text{points}\} \longrightarrow \{E_1\text{-algèbres}\}$$

analyse d'un
module

$$X \longmapsto \Omega X$$

$$BM \longleftarrow M$$

adjoint à gauche

$$M \longrightarrow \Omega BM \quad \text{groupe complet}$$

construction
bar

$\Rightarrow$
groupe
complet
théorème

$$H_* (H_\infty^1(KA), \mathbb{Q}) = H_* (\Omega_0 BM, \mathbb{Q})$$

Il faut donc réussir à décrire ΩBM !

- Une technique de « scanning » donne le module rationnel $W(A) = S^2 V KA / \langle i \rangle$ et on calcule explicitement

$$A \longmapsto H_* (W(A), \mathbb{Q})$$

on utilise la dualité de Koszul et d'homotopie rationnelle.

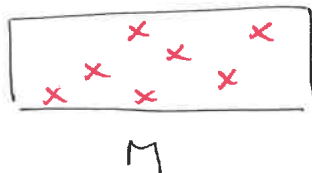
- scanning

$$Fin_{M \times [0,1]} \longrightarrow \Omega Fin_{M \times \mathbb{R}}$$

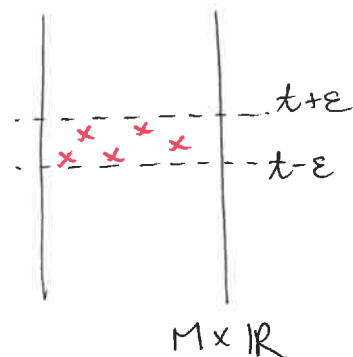
(Segal-McDuff)

$$\Omega Fin_{M \times \mathbb{R}}$$

$[0,1]$



$$t \mapsto$$



Équivalence
d'homotopie finie
groupe complet

⑥

est le groupe confiture de l'espace de configurations $\text{Fin}_{M \times [0,1]} = \coprod_{n \geq 0} \text{Conf}_n(M \times (0,1))$

Pour $M = [0,1]$, on obtient

$$\coprod_{n \geq 0} \text{Conf}_n(\mathbb{D}) \longrightarrow \Omega^2 \text{Fin}_{\mathbb{R}^2} \simeq \Omega^2 S^2$$

[BDPW] fait un usage de cet argument pour l'espace de Hurwitz $\text{Hur}_{[0,1]^2}$ de triplets

- configuration $C \subset (0,1)^2$
- revêtement double
sur les ces points
 $E \rightarrow [0,1]^2$

- $E \rightarrow KA$ $\mathbb{Z}/2$ -équivalent

se résume sur
les configurations à
deux points

